DM 6 - Correction

Exercice 1 (Très classique). *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par*

$$\begin{cases} u_0 & = & 1 \\ u_{n+1} & = & \sin(u_n) \end{cases}$$

1. *Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n < \frac{\pi}{2}$.*
2. *On note $f(x) = \sin(x) - x$. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) < 0$.*
3. *En déduire le sens de variation de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*
4. *En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell \in \mathbb{R}$*
5. *Montrer que $f(x) = 0 \iff x = 0$.*
6. *Déterminer la valeur de ℓ.*

Correction.

1. On fait une récurrence. Soit $P(n)$ la propriété définie par : "$0 < u_n < \frac{\pi}{2}$" Par définition $u_0 = 1$, et on a bien $0 < 1 < \frac{\pi}{2}$ (car $\pi > 3$) Donc La propriété P est vraie au rang 0.
   On suppose qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que P_{n_0} soit vraie et on va montrer que ceci implique P_{n_0+1}
   En effet, pour tout $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$, $\sin(x) \in]0, 1[$. Donc si P_{n_0} est vraie, c'est à dire $u_{n_0} \in]0, \frac{\pi}{2}[$, on a alors $u_{n_0+1} = \sin(u_{n_0}) \in]0, 1[$. De nouveau comme $1 < \frac{\pi}{2}$ ceci implique P_{n_0+1}.
   Par récurrence, la propriété $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = cos(x) - 1 \leq 0$. Donc f est décroissante et $f(0) = 0$. Donc pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) < 0$.
3. $u_{n+1} - u_n = sin(u_n) - u_n = f(u_n)$ Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$ d'après la question 1, on a donc $f(u_n) < 0$ d'après la question 2. Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$
   $$u_{n+1} \leq u_n$$
   ce qui assure que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
4. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée (par 0) d'après la question 1 et décroissante d'après la question précédente. Par théorème de la limite monotone, la suite converge vers $\ell \geq 0$
5. L'étude de f a montré que $f(x) < 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et $f(x) < 0$ sur $\mathbb{R}_-^*$. Ainsi $f(x) = 0 \implies x = 0$. Réciproquement, si $x = 0$, $f(0) = \sin(0) - 0 = 0$. L'équivalence est bien montrée.
6. Comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell \in \mathbb{R}$ on a aussi $\lim u_{n+1} = \ell$. De plus, comme la fonction sinus est continue sur $\mathbb{R}$ on a $\lim \sin(u_n) = \sin(\lim u_n)$. Ainsi la limite ℓ satisfait $\ell = \sin(\ell)$. Ce qui d'après la question précédente implique $\ell = 0$.
   Finalement
   $$\lim u_n = 0$$

□

Exercice 2. *On reprend les notations de l'exercice précédent.*

1. *Ecrire une fonction qui prend en paramètre $n \in \mathbb{N}$ et qui retourne la valeur de u_n. (Pour ceux qui n'ont pas encore vu les fonctions, vous pouvez écrire un script qui demande à l'utilisateur la valeur de n souhaité et qui retourne la valeur de u_n sans les fonctions, mais bon c'est pas si différent...)*
2. *Ecrire une fonction qui prend en paramètre $e \in \mathbb{R}^+$ et qui retourne la valeur du premier terme $n_0 \in \mathbb{N}$ telle que $|u_{n_0} - \ell| \leq e$ et la valeur de u_{n_0}. (même remarque)*

Correction.

```python
def u(n):
    x=1    #valeur de u0
    for i in range(n):
        x=sin(x)    #relation de recurrence que l'on applique n fois avec range(n)
    return(x)

from math import abs
def limite(e):
    L=0 #valeur de la limite
    n=0  #on met en place un compteur
    val=u(n)  #valeur de u0

    while abs(val-L)>e: #tant que la valeur de |u(n)-L| est plus grande que e
        n+=1 #on incremente la valeur du compteur de 1
        val =u(n) #on actualise la valeur de u(n)

    return(n, u(n))
```

□

Exercice 3. *Soit $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $I_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+1} = (2n+1)I_n$. Exprimer I_n en fonction de n à l'aide uniquement de factorielle et puissance.*

Correction. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $I_{n+1} = (2n+1)I_n$. Donc on a $I_n = (2(n-1)+1)I_{n-1}$ et $I_{n-1} = (2(n-2)+1)I_{n-2}$ et ainsi de suite jusqu'a $I_2 = (2\times 1+1)I_1 = 3I_1$ et $I_1 = (2\times 0+1)I_0 = I_0$. Ceci donne

$$I_n = \left(\prod_{k=0}^{n-1}(2k+1)\right) I_0$$

(on peut vérifier la formule par récurrence si l'on veut être sûr)

Ici il s'agit maintenant de simplifier le produit. $\prod_{k=0}^{n-1}(2k+1)$ correspond au produit sur les nombres impairs de 1 à $2n-1$. Le produit sur les pairs de 2 à $2n$ vaut

$$\prod_{k=1}^{n}(2k) = 2^n \prod_{k=1}^{n}(k) = 2^n \times n!$$

et le produit sur tous les nombres de 1 à $2n$ vaut

$$\prod_{k=1}^{2n}(k) = (2n)!$$

Ainsi

$$\prod_{k=0}^{n-1}(2k+1) = \frac{(2n)!}{2^n \times n!}$$

□

Exercice 4.
1. *Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ l'équation $x^3 + nx = 1$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}^+$. On la note x_n.*
2. *Montrer que $x_{n+1}^3 + nx_{n+1} - 1 < 0$.*
3. *En déduite que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.*
4. *Justifier que la suite est minorée par 0 et majorée par 1.*
5. *En déduire que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.*
6. *A l'aide d'un raisonement par l'absurde justifier que cette limite vaut 0.*

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on note $f_n(x) = x^3 + nx - 1$. C'est un polynome de degré 3, il est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a

$$f'(x) = 3x^2 + n$$

Comme $n \geq 0$, la dérivée est strictement positive sur $\mathbb{R}$ et ainsi la fonction f_n est strictement croissante.

On a par ailleurs $f_n(0) = -1$ et $f_n(1) = n \geq 1$. Comme f_n est continue sur $[0, 1]$ et strictement croissante on peut appliquer le théorème de la bijection pour la valeur $0 \in [f_n(0), f_n(1)] = [-1, 1]$. Ce théorème assure qu'il existe $x_n \in [0, 1]$ tel que $f_n(x_n) = 0$.

2. On calcule $f_n(x_{n+1}) = x_{n+1}^3 + nx_{n+1} - 1$, on va montrer que $f_n(x_{n+1}) < 0$. Or par définition de x_{n+1} on a $f_{n+1}(x_{n+1}) = 0$ ce qui donne :

$$x_{n+1}^3 + (n+1)x_{n+1} - 1 = 0$$

Donc $xx_{n+1}^3 + nx_{n+1} - 1 = -x_{n+1}$

Finalement en remplaçant dans la première égalité on obtient :

$$f_n(x_{n+1}) = -x_{n+1}$$

Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \geq 0$ d'après la première question,on a bien

$$f_n(x_{n+1}) < 0$$

3. Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est strictement croissante, et $f_n(x_{n+1}) \leq f_n(x_n) = 0$ on a

$$x_{n+1} \leq x_n$$

Ainsi, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

4. Le raisonement effectué à la question 1 montre que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est minorée par 0 et majorée par 1.

5. La suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et minorée. Le théorème de la limite monotone assure que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge. Notons $\ell \in \mathbb{R}$ cette limite.

6. Comme $x_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\lim x_n \geq 0$.. Supposons par l'absurde que $\ell > 0$.

On a alors d'une par $f_n(x_n) = 0$ donc $\lim x_n^3 + nx_n - 1 = 0$. Par ailleurs, $\lim x_n^3 - 1 = \ell^3 - 1$ et $\lim nx_n = +\infty$. Donc $\lim x_n^3 + nx_n - 1 = +\infty$. Comme $0 \neq +\infty$ et que la limite est unique, c'est une contradiction. Ainsi $\ell = 0$.