Correction : DS 8 - Concours Blanc

Exercice 1. 1. Enoncer le théorème des accroissements finis avec ses hypothéses.

2. A l'aide de ce théorème prouver que pour tout $x > 0$:

$$\frac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln(x) < \frac{1}{x}$$

3. On note $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, déduire des deux inégalités précédentes que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\ln(n+1) < S_n < \ln(n) + 1$$

4. En déduire un équivalent de $(S_n)_{n\geq 1}$ quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 2. On définit l'application :

$$g \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (2y-2z, -2x+4y-2z, -2x+2y) \end{array} \right.$$

1. Montrer que pour tout $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$, $u_1 \in \mathbb{R}^3$ et $u_2 \in \mathbb{R}^3$, montrer que

$$g(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2) = \lambda_1 g(u_1) + \lambda g(u_2)$$

(On dit alors que g est linéaire)

2. Soit $u = (1,1,1)$, $v = (2,3,1)$ et $w = (0,1,1)$. Calculer $g(u), g(v)$ et $g(w)$ et les exprimer en fonction de u, v et w.
3. Soit $E_0 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, g(x,y,z) = (0,0,0)\}$. Montrer que E_0 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et en donner une base.
4. On note Id_3 la fonction identité de $\mathbb{R}^3$, à savoir,

$$\mathrm{Id}_3 : (x,y,z) \mapsto (x,y,z)$$

Soit $E_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, (g - 2\,\mathrm{Id}_3)(x,y,z) = (0,0,0)\}$. On admet que E_2 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ de dimension 2. En donner une base.

5. Montrer que $E_0 \cap E_2 = \{(0,0,0)\}$. [1]
6. On note toujours $u = (1,1,1)$, $v = (2,3,1)$ et $w = (0,1,1)$. Montrer que (u,v,w) est une base de $\mathbb{R}^3$.
7. Soit $A = (1,-1,-3)$. Donner les coordonées de A dans la base (u,v,w). [2]
8. A l'aide de la question précédente et de la question 1, montrer que

$$g(A) = 2(v - 3w)$$

9. On note $g^2 = g \circ g$. Montrer que $g^2(A) = 4(v - 3w)$. [3]
10. On note $g^n = g \circ g \cdots \circ g$ où l'on a composé n fois. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ déterminer $g^n(A)$ en fonction de n, v et w.

Correction 1.

1. Cette question peut se répondre avec ou sans sytème...
2. Autrement dit, exprimer A en fonction de (u,v,w)
3. On pourra utiliser les questions 1 et 8

1. Soit $u_1 = (x_1, y_1, z_1)$ et $u_2 = (x_2, y_2, z_2)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a donc

$$u_1 + \lambda u_2 = (x_1 + \lambda x_2, y_1 + \lambda y_2, z_1 + \lambda z_2)$$

et donc

$$\begin{aligned} g(u_1 + \lambda u_2) &= g(x_1 + \lambda x_2, y_1 + \lambda y_2, z_1 + \lambda z_2) \\ &= (2(y_1 + \lambda y_2) - 2(z_1 + \lambda z_2), -2(x_1 + \lambda x_2) + 4(y_1 + \lambda y_2) - 2(z_1 + \lambda z_2), -2(x_1 + \lambda x_2) + 2(y_1 + \\ &= (2y_1 - 2z_1, -2x_1 + 4y_1 - 2z_1, -2x_1 + 2y_1) + \lambda(2y_2 - 2z_2, -2x_2 + 4y_2 - 2z_2, -2x_2 + 2y_2) \\ &= g(u_1) + \lambda g(u_2) \end{aligned}$$

$$\boxed{g(u_1 + \lambda u_2) = g(u_1) + \lambda g(u_2)}$$

2.

$$\begin{aligned} g(u) &= (2 - 2, -2 + 4 - 2, -2 + 2) = (0, 0, 0) \\ g(v) &= (6 - 2, -4 + 12 - 2, -4 + 6) = (4, 6, 2) = 2v \\ g(w) &= (2 - 2, 4 - 2, 2) = (0, 2, 2) = 2w \end{aligned}$$

$$\boxed{g(u) = 0 \ , \ g(v) = 2v \ , \ g(w) = 2w}$$

3. E_0 n'est pas vide, en effet $g(0, 0, 0) = (0, 0, 0)$, donc $(0, 0, 0) \in E_0$. Montrons que E_0 est stable par combinaisons linéaires. Soit $u_1, u_2 \in E_0$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a alors $g(u_1 + \lambda u_2) = g(u_1) + \lambda g(u_2)$ d'après la question 1. Or $g(u_1) = g(u_2) = (0, 0, 0)$ par définition de E_0 donc

$$g(u_1 + \lambda u_2) = (0, 0, 0)$$

Ainsi $u_1 + \lambda u_2 \in E_0$

$$\boxed{E_0 \text{ est un sous espace vectoriel de } \mathbb{R}^3}$$

Trouvons maintenant une base de E_0, pour cela écrivons E_0 sous forme vectorielle. On a $(x, y, z) \in E_0 \iff g(x, y, z) = (0, 0, 0)$ ce qui équivaut au système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{rrrl} & 2y & -2z & = 0 \\ -2x & +4y & -2z & = 0 \\ -2x & +2y & & = 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rrrl} -x & +y & & = 0 \\ -x & +2y & -z & = 0 \\ & y & -z & = 0 \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rrrl} -x & +y & & = 0 \\ & y & -z & = 0 \\ & y & -z & = 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rrl} x & & = z \\ & y & = z \end{array} \right.$$

Ainsi $E_0 = \{(z, z, z) | z \in \mathbb{R}\} = Vect((1, 1, 1))$

$$\boxed{((1, 1, 1)) \text{ est une base de } E_0, \dim(E_0) = 1}$$

4. D'après la question 2 :
$g(v) = 2v$ donc $(g - 2\,\mathrm{Id})(v) = (0, 0, 0)$ donc $v \in E_2$.
$g(w) = 2w$ donc $(g - 2\,\mathrm{Id})(w) = (0, 0, 0)$ donc $w \in E_2$.
On a donc $Vect(v, w) \subset E_2$ Or (v, w) est une famille libre car les deux vecteurs ne sont pas proportionnels, donc c'est une base de $Vect(v, w)$. Donc $Vect(v, w)$ est de dimension 2. Comme on d'après l'énoncé $Dim(E_2) = 2$ on a l'égalité :

$$\mathrm{Vect}(v, w) = E_2$$

$$\boxed{\text{Finalement } (v, w) \text{ est donc aussi une base de } E_2}$$

5. Soit $X \in E_0 \cap E_2$, comme $X \in E_0$ on a $g(X) = (0, 0, 0)$ et comme $X \in E_2$ on a $(g - 2\,\mathrm{Id})(X) = (0, 0, 0)$ c'est-à-dire $g(X) = 2X$. Ainsi $2X = (0, 0, 0)$ on a bien

$$\boxed{E_0 \cap E_2 = \{(0, 0, 0)\}}$$

6. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $au + bv + cw = (0, 0, 0)$. On a donc $au = -bv - cw$. Or $au \in E_0$ et $-bv - cw \in E_2$ et comme $au = -bv - cw$

$$au \in E_0 \cap E_2 \quad \text{et} \quad -bv - cw \in E_0 \cap E_2$$

D'après la question précédente on a donc $au = (0, 0, 0)$ et comme $u \neq 0$, $a = 0$. De même on a $-bv - cw = (0, 0, 0)$ et comme on a bvu que v, w était libre, cecie impique que $b = c = 0$
Ainsi $a = b = c = 0$ donc la famille (u, v, w) est libre, comme elle est de cardinal 3 on a finalment

$$\boxed{(u, v, w) \text{ est une base de } \mathbb{R}^3}$$

7. On cherche $a, b, c \in \mathbb{R}^3$ tel que $au + bv + cw = (1, -1, 3)$ c'est-à-dire (a, b, c) qui vérifie le système

$$\begin{cases} a + 2b & & = 1 \\ a + 3b & +c & = -1 \\ a + b & +c & = -3 \end{cases}$$

Après calcul on obtient : $a = -1, b = 1, c = -3$

$$\boxed{\text{Dans la base } (u, v, w) \text{ les coordonnées de } A \text{ sont } (-1, 1, -3)}$$

8. D'après la question précédente $g(A) = g(-u + v - 3w)$. Ce qui donne d'après la question 1,

$$g(A) = -g(u) + g(v) - 3g(w)$$

Or $g(u) = 0, g(v) = 2v$ et $g(w) = 2w$ donc
$g(A) = 2v - 3 \times 2w$

$$\boxed{g(A) = 2(v - 3w)}$$

9.

$$\begin{aligned} g^2(A) &= g \circ g(A) \\ &= g(g(A)) \\ &= g(2(v - 3w) && \text{D'après la question 8} \\ &= g(2v - 2 \times 3w) \\ &= 2g(v) - 2 \times 3g(w) && \text{D'après la question 1} \\ &= 2(2v - 2 \times 3 \times 2w) && \text{D'après la question 2} \\ &= 4(v - 3w) \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On a bien } g^2(A) = 4(v - 3w)}$$

10. On montre par récurrence la propriété suivante $P(n)$: "$g^n(A) = 2^n(v - 3w)$"
L'initialisation a été faite pour $n = 1$ et $n = 2$ dans les questions précédentes.

Montrons que P est héréditaire. On suppose donc qu'il existe n tel que $P(n)$ soit vrai. On a alors $g^n(A) = 2^n(v - 3w)$ En composant par g on obtient

$$\begin{aligned}
g^{n+1}(A) &= g \circ g^n(A) \\
&= g(g^n(A)) \\
&= g(2^n(v - 3w) && \text{Par hypothése de récurrence} \\
&= g(2^n v - 2^n \times 3w) \\
&= 2^n g(v) - 2^n \times 3g(w) && \text{D'après la question 1} \\
&= 2^n(2v - 2 \times 3 \times 2w) && \text{D'après la question 2} \\
&= 2^{n+1}(v - 3w)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ g^n(A) = 2^n(v - 3w)}$$

Exercice 3. Une puce se déplace le long d'un axe. Au temps $n = 0$ la puce est en 0. Puis à chaque saut elle monte de 1 avec probabilité $1/2$ et descend de 1 avec probabilité $1/2$.

On s'intérresse à la probabilité que la puce revienne à l'origine. On note A_n l'événement

$$A_n = \text{ 'La puce est en 0 au saut } n\text{'}$$

1. Quelle est la probabilité de l'événement A_1 ?
2. Quelle est la probabilité de l'événement A_2 ?
3. Soit E_n l'événement 'la puce est sur un nombre pair au rang n'. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(E_{2n+1}) = 0$ et $P(E_{2n}) = 1$. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$ la valeur de $P(A_{2n+1})$
4. On fixe un nombre entier pair que l'on note $2n$. Soit M_k l'événement 'la puce est montée k fois durant les $2n$ sauts' et D_k l'événement 'la puce est descendue k fois durant les $2n$ sauts'.
   (a) Calculer $P(M_k)$ en fonction de k er n.
   (b) Exprimer l'événement A_{2n} à l'aide des événements M_n et D_n.
   (c) En déduire la valeur de $P(A_{2n})$ en fonction de n.
5. On considère le programme suivant censé modéliser la position de la puce après n sauts :

```
def sauts(n):
    puce=0
    for i in range(n):
        p=random()
        if    :
            puce=puce+1
        else:
            puce=
    return(puce)
```

   Recopier et compléter sur votre copie le programme précedent pour qu'il fonctionne.
6. Ecrire une fonction python `A` qui prend en argument le nombre de sauts n et retourne `True` si la puce est en 0 au temps n et `False` sinon.
7. Ecrire une fonction Python qui permet de donner une valeur approchée de $P(A_{2n})$ en itérant un grand nombre de fois l'expérience. (A l'aide de la fonction `A` et sans utiliser la formule obtenue en 5c)
8. Ecrire une fonction Python qui permet de modéliser les sauts de puce jusqu'à la première fois où la puce revient en 0 et retourne le nombre de sauts effectués.

Correction 2.

1. Au saut 1 la puce est soit en 1 soit en -1 donc $P(A_1) = 0$
2. Soit T_1 l'événement la puce est en 1 au saut 1 et T_{-1} la puce est en -1 au saut 1. (T_1, T_{-1}) st un SCE et on peut appliquer la fomrule des probabilités totales, on obtient :
$$P(A_2) = P(A_2|T_1)P(T_1) + P(A_2|T_{-1})P(T_{-1})$$
On a $P(A_2|T_1) = P(A_2|T_{-1}) = 1/2$ et $P(T_1) = P(T_{-1}) = 1/2$ donc
$$\boxed{P(A_2) = \frac{1}{2}}$$
3. Soit $Q(n)$ la proposition " $P(E_{2n}) = 1$ et $P(E_{2n+1}) = 0$" Initialisation : En 0 la puce est en 0 donc $P(E_0) = 1$
Au saut 1 la puce est soit en 1 soit en -1, en particulier elle n'est pas sur un nombre pair. Donc $P(E_1) = 0$ et la propriété $Q(0)$ est vérifiée.
Hérédité : On suppose que la proposition Q est vraie pour un entier $n \in \mathbb{N}$ on a donc $P(E_{2n}) = 1$ et $P(E_{2n+1}) = 0$. Calculons maintenant $P(E_{2(n+1)}) = P(E_{2n+2})$.

On utilise le SCE E_{2n+1}, $\overline{E_{2n+1}}$

$$\begin{aligned} P(E_{2(n+1)}) &= P(E_{2n+2}|E_{2n+1})P(E_{2n+1}) + P(E_{2n+2}|\overline{E_{2n+1}})P(\overline{E_{2n+1}}) \\ &= 0+1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

4. $A_{2n+1} \subset E_{2n+1}$ donc $P(A_{2n+1}) \leq P(E_{2n+1}) = 0$. Ainsi

$$\boxed{P(A_{2n+1}) = 0}$$

5. (a) Pour monter k fois il faut choisir les k fois où parmi les 2n sauts où la puce monte. On obtient donc $P(M_k) = \binom{2n}{k}(\frac{1}{2})^k \frac{1}{2}^{2n-k}$

$$\boxed{P(M_k) = \binom{2n}{k}\frac{1}{2^{2n}}}$$

(b) $A_{2n} = M_n \cap D_n$

(c) Remarquons que si M_n est vérifiée alors nécessaire D_n est vérifié. Ainsi $P_{M_n}(D_n) = 1$, donc

$$P(A_{2n}) = P(M_n)P_{M_n}(D_n) = P(M_n)$$

Finalement

$$\boxed{P(A_{2n}) = \binom{2n}{n}\frac{1}{2^{2n}} = \binom{2n}{n}\frac{1}{4^n}}$$

6.
```
def sauts(n):
    puce=0
    for i in range(n):
        p=random()
        if p>1/2 :
            puce=puce+1
        else:
            puce=puce-1
    return(puce)
```

```
def A(n):
    x=sauts(n)
    if x==0:
        return(True)
    else:
        return(False)
```

8.
```
def approx(n):
        c=0
        for i in range(10000):
                if A(n):
                        c=c+1
        return(c/10000)
```

9.
```
def tempsdarret():
        puce=0
        n=0
        while puce!=0 and n!=0:
                p=random()
```

```
            if p>1/2 :
                puce=puce+1
            else:
                puce=puce-1
            n=n+1
        return(n)
```

Exercice 4. Soit $a \in]-1,1[$. On suppose l'existence d'une application f, continue sur $\mathbb{R}$, telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \int_0^{ax} f(t)dt.$$

1. Calcul des dérivées successives de f.
   (a) Justifier l'existence d'une primitive F de f sur $\mathbb{R}$ et écrire alors, pour tout nombre réel x, $f(x)$ en fonction de x, a et F.
   (b) Justifier la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}$ et exprimer, pour tout nombre réel x, $f'(x)$ en fonction de x, a et f.
   (c) Démontrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et que pour tout nombre entier naturel n, on a

   $$\forall x \in \mathbb{R} \quad f^{(n)}(x) = a^{n(n+1)/2} f(a^n x).$$

   (d) En déduire, pour tout nombre entier naturel n la valeur de $f^{(n)}(0)$.
2. Démontrer que, pour tout nombre réel x et tout nombre entier n, on a :

   $$f(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt.$$

   On pourra faire une récurrence et utiliser une intégration par parties
3. Soit A un nombre réel strictement positif.
   (a) Justifier l'existence d'un nombre réel positif ou nul M tel que :

   $$\forall x \in [-A, A], \quad |f(x)| \leq M$$

   et en déduire que pour tout nombre entier naturel n, on a :

   $$\forall x \in [-A, A], \quad |f^{(n)}(x)| \leq M$$

   .

   (b) Soit x un nombre réel apartenant à $[-A, A]$. Démontrer que, pour tout nombre entier naturel n, on a

   $$|f(x)| \leq M \frac{A^{n+1}}{(n+1)!}.$$

   (c) En déduire que $f(x) = 0$ pour tout $x \in [-A, A]$
   (d) Que peut-on en déduire sur la fonction f ?

Correction 3.

1. (a) f est continue sur $\mathbb{R}$ donc admet une primitive, notée F. On a par définition de l'intégrale $f(x) = F(ax) - F(0)$.
   (b) Une primitive est par définiton une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ donc F est de classe $\mathcal{C}^1$ et finalemtn f est de classe $\mathcal{C}^1$. On a

   $$f'(x) = aF'(ax) = af(ax).$$

   (c) On pose $P(n)$: " f est de classe C^n et $\forall x \in \mathbb{R} \quad f^{(n)}(x) = a^{n(n+1)/2} f(a^n x)$ ".

— $P(0)$ est vraie par hypothèse.

— Supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$ soit vraie. On a alors f de classe $\mathcal{C}^n$, et $\forall x \in \mathbb{R} \quad f^{(n)}(x) = a^{n(n+1)/2} f(a^n x)$. Or comme f est de classe $\mathcal{C}^1$ d'après la question précédente, on a alors que $f^{(n)}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ c'est à dire f de classe $\mathcal{C}^{n+1}$. Enfin $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= a^{n(n+1)/2} f'(a^n x) \\ &= a^{n(n+1)/2+n} a f(a a^n x) \quad \text{d'après la question précédente} \\ &= a^{n(n+1)/2+n+1} f(a^{n+1} x) \\ &= a^{(n+1)(n+2)/2} f(a^{n+1} x) \end{aligned}$$

— On a montré par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, f est de classe $\mathcal{C}^n$. Elle est donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ et $\forall x \in \mathbb{R} \quad f^{(n)}(x) = a^{n(n+1)/2} f(a^n x)$.

(d) On a donc $f^{(n)}(0) = a^{n(n+1)/2} f(0)$. Or $f(0) = \int_0^0 f(t)df = 0$ Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$f^{(n)}(0) = 0$$

2. On montre le résultat par récurrence. On pose pour tout nombre réel x et tout nombre entier n, la proposition $P(n)$: "$f(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt$."

— Réécrivons $P(0)$. On a $P(0)$: "$f(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^0}{0!} f^{(0+1)}(t)dt$.", c'est à dire : $f(x) = \int_0^x f'(t)dt$. Ce qui est vrai par définition de l'intégrale.

— Supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$ soit vraie. On a alors pour tout nombre réel x, $f(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt$. Comme suggérer par l'énoncé on fait une IPP. On pose
$u(t) = f^{(n+1)}(t)$ $\quad u'(t) = f^{(n+2)}(t)$
$v(t) = -\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}$ $\quad v'(t) = \frac{(x-t)^n}{n!}$
On a donc

$$f(x) = \left[\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(t) \right]_0^x - \int_0^x -\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)dt$$

Le crochet vaut $\frac{(x-x)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x) - \frac{(x-0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(0)$ les deux termes valent 0 (le second à l'aide de la question précédente). On obtient bien

$$f(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)dt$$

— Par récurrence la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. (a) Soit $A > 0$. Comme f est continue et $[-A, A]$ est un segment, le théorème de continuité sur un segment assure que f est bornée et atteint ses bornes. Donc il existe $M > 0$ tel que pour tout $x \in [-A, A]$, $|f(x)| \leq M$.
D'après 1c) on sait que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f^{(n)}(x) = a^{n(n+1)/2} f(a^n x)$ En particulier $|f^{(n)}(x)| = |a^{n(n+1)/2}||f(a^n x)|$ Or comme $|a| < 1$, $|a^{n(n+1)/2}| \leq 1$ et pour tout $x \in [-A, A]$, on a $a^n x \in [-A, A]$ et ainsi $|f(a^n x)| \leq M$. Au final pour tout $x \in [-A, A]$:

$$|f^{(n)}(x)| \leq M.$$

(b) D'après la question 2 on a : $f(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt$, donc $|f(x)| \leq \displaystyle\int_0^x \left| \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) \right| dt$ c'est l'inégatilité triangulaire sur les intégrales. On majore maintenant $\left| f^{(n+1)}(t) \right|$ à l'aide de la question précédente, on obtient pour tout $x \in [-A, A]$:

$$f(x) \leq M \int_0^x \left| \frac{(x-t)^n}{n!} \right| dt.$$

Donc $f(x) \leq M\left[\frac{|(x-t)|^{n+1}}{(n+1)!}\right]_0^x \leq M\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$ Or comme $x \in [-A, A]$ on a bien :

$$|f(x)| \leq M\frac{A^{n+1}}{(n+1)!}$$

(c) Par croissance comparée, en passant à la limite on a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{A^{n+1}}{(n+1)!} = 0$$

Ainsi le théorème des gendarmes assure que pour tout $x \in [-A, A]$ on a

$$\lim_{n\to\infty} f(x) = 0.$$

Evidemment $f(x)$ ne dépend pas de n donc par unicité de la limite $f(x) = 0$
Ceci étant vrai pour tout $x \in [-A, A]$ et comme A est arbitraire, ceci est vrai pour tout $x \in \mathbb{R}$.

$$f \equiv 0$$