DS 8 - Concours Blanc

Durée 3h00

- Les calculatrices sont <u>interdites</u> durant les cours, TD et *a fortiori* durant les DS de mathématiques.
- Si vous pensez avoir découvert une erreur, indiquez-le clairement sur la copie et justifiez les initiatives que vous êtes amenés à prendre.
- Une grande attention sera apportée à la clarté de la rédaction et à la présentations des solutions. (Inscrivez clairement en titre le numéro de l'exercice, vous pouvez aussi encadrer les réponses finales.)
- Vérifiez vos résultats.
- Le résultat d'une question peut être admis et utilisé pour traiter les questions suivantes en le signalant explicitement sur la copie.

Exercice 1. 1. Enoncer le théorème des accroissements finis avec ses hypothéses.

2. A l'aide de ce théorème prouver que pour tout $x > 0$:

$$\frac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln(x) < \frac{1}{x}$$

3. On note $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, déduire des deux inégalités précédentes que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\ln(n+1) < S_n < \ln(n) + 1$$

4. En déduire un équivalent de $(S_n)_{n\geq 1}$ quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 2. On définit l'application :

$$g \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (2y-2z, -2x+4y-2z, -2x+2y) \end{array} \right.$$

1. Montrer que pour tout $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$, $u_1 \in \mathbb{R}^3$ et $u_2 \in \mathbb{R}^3$, montrer que

$$g(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2) = \lambda_1 g(u_1) + \lambda g(u_2)$$

(On dit alors que g est linéaire)

2. Soit $u = (1,1,1)$, $v = (2,3,1)$ et $w = (0,1,1)$. Calculer $g(u), g(v)$ et $g(w)$ et les exprimer en fonction de u, v et w.
3. Soit $E_0 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, g(x,y,z) = (0,0,0)\}$. Montrer que E_0 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et en donner une base.
4. On note Id_3 la fonction identité de $\mathbb{R}^3$, à savoir,

$$\mathrm{Id}_3 : (x,y,z) \mapsto (x,y,z)$$

Soit $E_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, (g - 2\,\mathrm{Id}_3)(x,y,z) = (0,0,0)\}$. On admet que E_2 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ de dimension 2. En donner une base.

5. Montrer que $E_0 \cap E_2 = \{(0,0,0)\}$. [1]
6. On note toujours $u = (1,1,1)$, $v = (2,3,1)$ et $w = (0,1,1)$. Montrer que (u,v,w) est une base de $\mathbb{R}^3$.
7. Soit $A = (1,-1,-3)$. Donner les coordonées de A dans la base (u,v,w). [2]
8. A l'aide de la question précédente et de la question 1, montrer que

$$g(A) = 2(v - 3w)$$

9. On note $g^2 = g \circ g$. Montrer que $g^2(A) = 4(v - 3w)$. [3]
10. On note $g^n = g \circ g \cdots \circ g$ où l'on a composé n fois. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ déterminer $g^n(A)$ en fonction de n, v et w.

Correction 1.

1. Cette question peut se répondre avec ou sans sytème...
2. Autrement dit, exprimer A en fonction de (u,v,w)
3. On pourra utiliser les questions 1 et 8

1. Soit $u_1 = (x_1, y_1, z_1)$ et $u_2 = (x_2, y_2, z_2)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a donc

$$u_1 + \lambda u_2 = (x_1 + \lambda x_2, y_1 + \lambda y_2, z_1 + \lambda z_2)$$

   et donc

$$\begin{aligned} g(u_1 + \lambda u_2) &= g(x_1 + \lambda x_2, y_1 + \lambda y_2, z_1 + \lambda z_2) \\ &= (2(y_1 + \lambda y_2) - 2(z_1 + \lambda z_2), -2(x_1 + \lambda x_2) + 4(y_1 + \lambda y_2) - 2(z_1 + \lambda z_2), -2(x_1 + \lambda x_2) + 2(y_1 + \\ &= (2y_1 - 2z_1, -2x_1 + 4y_1 - 2z_1, -2x_1 + 2y_1) + \lambda(2y_2 - 2z_2, -2x_2 + 4y_2 - 2z_2, -2x_2 + 2y_2) \\ &= g(u_1) + \lambda g(u_2) \end{aligned}$$

$$\boxed{g(u_1 + \lambda u_2) = g(u_1) + \lambda g(u_2)}$$

2.

$$\begin{aligned} g(u) &= (2 - 2, -2 + 4 - 2, -2 + 2) = (0, 0, 0) \\ g(v) &= (6 - 2, -4 + 12 - 2, -4 + 6) = (4, 6, 2) = 2v \\ g(w) &= (2 - 2, 4 - 2, 2) = (0, 2, 2) = 2w \end{aligned}$$

$$\boxed{g(u) = 0 \ , \ g(v) = 2v \ , \ g(w) = 2w}$$

3. E_0 n'est pas vide, en effet $g(0, 0, 0) = (0, 0, 0)$, donc $(0, 0, 0) \in E_0$. Montrons que E_0 est stable par combinaisons linéaires. Soit $u_1, u_2 \in E_0$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a alors $g(u_1 + \lambda u_2) = g(u_1) + \lambda g(u_2)$ d'après la question 1. Or $g(u_1) = g(u_2) = (0, 0, 0)$ par définition de E_0 donc

$$g(u_1 + \lambda u_2) = (0, 0, 0)$$

   Ainsi $u_1 + \lambda u_2 \in E_0$

$$\boxed{E_0 \text{ est un sous espace vectoriel de } \mathbb{R}^3}$$

   Trouvons maintenant une base de E_0, pour cela écrivons E_0 sous forme vectorielle. On a $(x, y, z) \in E_0 \iff g(x, y, z) = (0, 0, 0)$ ce qui équivaut au système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{rrrl} & 2y & -2z & = 0 \\ -2x & +4y & -2z & = 0 \\ -2x & +2y & & = 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rrrl} -x & +y & & = 0 \\ -x & +2y & -z & = 0 \\ & y & -z & = 0 \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rrrl} -x & +y & & = 0 \\ & y & -z & = 0 \\ & y & -z & = 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rrl} x & & = z \\ & y & = z \end{array} \right.$$

   Ainsi $E_0 = \{(z, z, z) | z \in \mathbb{R}\} = Vect((1, 1, 1))$

$$\boxed{((1, 1, 1)) \text{ est une base de } E_0, \ \dim(E_0) = 1}$$

4. D'après la question 2 :
   $g(v) = 2v$ donc $(g - 2\,\mathrm{Id})(v) = (0, 0, 0)$ donc $v \in E_2$.
   $g(w) = 2w$ donc $(g - 2\,\mathrm{Id})(w) = (0, 0, 0)$ donc $w \in E_2$.
   On a donc $Vect(v, w) \subset E_2$ Or (v, w) est une famille libre car les deux vecteurs ne sont pas proportionnels, donc c'est une base de $Vect(v, w)$. Donc $Vect(v, w)$ est de dimension 2. Comme on d'après l'énoncé $Dim(E_2) = 2$ on a l'égalité :

$$\mathrm{Vect}(v, w) = E_2$$

$$\boxed{\text{Finalement } (v, w) \text{ est donc aussi une base de } E_2}$$

5. Soit $X \in E_0 \cap E_2$, comme $X \in E_0$ on a $g(X) = (0, 0, 0)$ et comme $X \in E_2$ on a $(g - 2\,\mathrm{Id})(X) = (0, 0, 0)$ c'est-à-dire $g(X) = 2X$. Ainsi $2X = (0, 0, 0)$ on a bien

$$\boxed{E_0 \cap E_2 = \{(0, 0, 0)\}}$$

6. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $au + bv + cw = (0, 0, 0)$. On a donc $au = -bv - cw$. Or $au \in E_0$ et $-bv - cw \in E_2$ et comme $au = -bv - cw$

$$au \in E_0 \cap E_2 \quad \text{et} \quad -bv - cw \in E_0 \cap E_2$$

D'après la question précédente on a donc $au = (0, 0, 0)$ et comme $u \neq 0$, $a = 0$. De même on a $-bv - cw = (0, 0, 0)$ et comme on a bvu que v, w était libre, cecie impique que $b = c = 0$
Ainsi $a = b = c = 0$ donc la famille (u, v, w) est libre, comme elle est de cardinal 3 on a finalment

$$\boxed{(u, v, w) \text{ est une base de } \mathbb{R}^3}$$

7. On cherche $a, b, c \in \mathbb{R}^3$ tel que $au + bv + cw = (1, -1, 3)$ c'est-à-dire (a, b, c) qui vérifie le système

$$\begin{cases} a + 2b & & = 1 \\ a + 3b & +c & = -1 \\ a + b & +c & = -3 \end{cases}$$

Après calcul on obtient : $a = -1, b = 1, c = -3$

$$\boxed{\text{Dans la base } (u, v, w) \text{ les coordonnées de } A \text{ sont } (-1, 1, -3)}$$

8. D'après la question précédente $g(A) = g(-u + v - 3w)$. Ce qui donne d'après la question 1,

$$g(A) = -g(u) + g(v) - 3g(w)$$

Or $g(u) = 0, g(v) = 2v$ et $g(w) = 2w$ donc
$g(A) = 2v - 3 \times 2w$

$$\boxed{g(A) = 2(v - 3w)}$$

9.

$$\begin{aligned} g^2(A) &= g \circ g(A) \\ &= g(g(A)) \\ &= g(2(v - 3w) && \text{D'après la question 8} \\ &= g(2v - 2 \times 3w) \\ &= 2g(v) - 2 \times 3g(w) && \text{D'après la question 1} \\ &= 2(2v - 2 \times 3 \times 2w) && \text{D'après la question 2} \\ &= 4(v - 3w) \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On a bien } g^2(A) = 4(v - 3w)}$$

10. On montre par récurrence la propriété suivante $P(n)$: "$g^n(A) = 2^n(v - 3w)$"
L'initialisation a été faite pour $n = 1$ et $n = 2$ dans les questions précédentes.

Montrons que P est héréditaire. On suppose donc qu'il existe n tel que $P(n)$ soit vrai. On a alors $g^n(A) = 2^n(v-3w)$ En composant par g on obtient

$$\begin{aligned}
g^{n+1}(A) &= g \circ g^n(A) \\
&= g(g^n(A)) \\
&= g(2^n(v-3w) && \text{Par hypothése de récurrence} \\
&= g(2^n v - 2^n \times 3w) \\
&= 2^n g(v) - 2^n \times 3g(w) && \text{D'après la question 1} \\
&= 2^n(2v - 2 \times 3 \times 2w) && \text{D'après la question 2} \\
&= 2^{n+1}(v-3w)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ g^n(A) = 2^n(v-3w)}$$

Exercice 3. Une puce se déplace le long d'un axe. Au temps $n = 0$ la puce est en 0. Puis à chaque saut elle monte de 1 avec probabilité $1/2$ et descend de 1 avec probabilité $1/2$.

On s'intérresse à la probabilité que la puce revienne à l'origine. On note A_n l'événement

$$A_n = \text{'La puce est en 0 au saut } n\text{'}$$

1. Quelle est la probabilité de l'événement A_1 ?
2. Quelle est la probabilité de l'événement A_2 ?
3. Soit E_n l'événement 'la puce est sur un nombre pair au rang n'. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(E_{2n+1}) = 0$ et $P(E_{2n}) = 1$. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$ la valeur de $P(A_{2n+1})$
4. On fixe un nombre entier pair que l'on note $2n$. Soit M_k l'événement 'la puce est montée k fois durant les $2n$ sauts' et D_k l'événement 'la puce est descendue k fois durant les $2n$ sauts'.
   (a) Calculer $P(M_k)$ en fonction de k er n.
   (b) Exprimer l'événement A_{2n} à l'aide des événements M_n et D_n.
   (c) En déduire la valeur de $P(A_{2n})$ en fonction de n.
5. On considère le programme suivant censé modéliser la position de la puce après n sauts :

```
def sauts(n):
    puce=0
    for i in range(n):
        p=random()
        if     :
            puce=puce+1
        else:
            puce=
    return(puce)
```

   Recopier et compléter sur votre copie le programme précedent pour qu'il fonctionne.
6. Ecrire une fonction python `A` qui prend en argument le nombre de sauts n et retourne `True` si la puce est en 0 au temps n et `False` sinon.
7. Ecrire une fonction Python qui permet de donner une valeur approchée de $P(A_{2n})$ en itérant un grand nombre de fois l'expérience. (A l'aide de la fonction `A` et sans utiliser la formule obtenue en 5c)
8. Ecrire une fonction Python qui permet de modéliser les sauts de puce jusqu'à la première fois où la puce revient en 0 et retourne le nombre de sauts effectués.

Correction 2.

1. Au saut 1 la puce est soit en 1 soit en -1 donc $P(A_1) = 0$
2. Soit T_1 l'événement la puce est en 1 au saut 1 et T_{-1} la puce est en -1 au saut 1. (T_1, T_{-1}) st un SCE et on peut appliquer la fomrule des probabilités totales, on obtient :
$$P(A_2) = P(A_2|T_1)P(T_1) + P(A_2|T_{-1})P(T_{-1})$$
   On a $P(A_2|T_1) = P(A_2|T_{-1}) = 1/2$ et $P(T_1) = P(T_{-1}) = 1/2$ donc
$$\boxed{P(A_2) = \frac{1}{2}}$$
3. Soit $Q(n)$ la proposition " $P(E_{2n}) = 1$ et $P(E_{2n+1}) = 0$" Initialisation : En 0 la puce est en 0 donc $P(E_0) = 1$
   Au saut 1 la puce est soit en 1 soit en -1, en particulier elle n'est pas sur un nombre pair. Donc $P(E_1) = 0$ et la propriété $Q(0)$ est vérifiée.
   Hérédité : On suppose que la proposition Q est vraie pour un entier $n \in \mathbb{N}$ on a donc $P(E_{2n}) = 1$ et $P(E_{2n+1}) = 0$. Calculons maintenant $P(E_{2(n+1)}) = P(E_{2n+2})$.

On utilise le SCE E_{2n+1}, $\overline{E_{2n+1}}$

$$\begin{aligned} P(E_{2(n+1)}) &= P(E_{2n+2}|E_{2n+1})P(E_{2n+1}) + P(E_{2n+2}|\overline{E_{2n+1}})P(\overline{E_{2n+1}}) \\ &= 0 + 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

4. $A_{2n+1} \subset E_{2n+1}$ donc $P(A_{2n+1}) \leq P(E_{2n+1}) = 0$. Ainsi

$$\boxed{P(A_{2n+1}) = 0}$$

5. (a) Pour monter k fois il faut choisir les k fois où parmi les 2n sauts où la puce monte. On obtient donc $P(M_k) = \binom{2n}{k}(\frac{1}{2})^k \frac{1}{2}^{2n-k}$

$$\boxed{P(M_k) = \binom{2n}{k}\frac{1}{2^{2n}}}$$

(b) $A_{2n} = M_n \cap D_n$

(c) Remarquons que si M_n est vérifiée alors nécessaire D_n est vérifié. Ainsi $P_{M_n}(D_n) = 1$, donc

$$P(A_{2n}) = P(M_n)P_{M_n}(D_n) = P(M_n)$$

Finalement

$$\boxed{P(A_{2n}) = \binom{2n}{n}\frac{1}{2^{2n}} = \binom{2n}{n}\frac{1}{4^n}}$$

6.

```
def sauts(n):
    puce=0
    for i in range(n):
        p=random()
        if  p>1/2 :
            puce=puce+1
        else:
            puce=puce-1
    return(puce)
```

```
def A(n):
    x=sauts(n)
    if x==0:
        return(True)
    else:
        return(False)
```

7. 8.

```
def approx(n):
        c=0
        for i in range(10000):
                if A(n):
                        c=c+1
        return(c/10000)
```

9.

```
def tempsdarret():
        puce=0
        n=0
        while puce!=0 and n!=0:
                p=random()
```

```
            if p>1/2 :
                puce=puce+1
            else:
                puce=puce-1
            n=n+1
        return(n)
```

Exercice 4. Soit $a \in]-1,1[$. On suppose l'existence d'une application f, continue sur $\mathbb{R}$, telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \int_0^{ax} f(t)dt.$$

1. Calcul des dérivées successives de f.
   (a) Justifier l'existence d'une primitive F de f sur $\mathbb{R}$ et écrire alors, pour tout nombre réel x, $f(x)$ en fonction de x, a et F.
   (b) Justifier la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}$ et exprimer, pour tout nombre réel x, $f'(x)$ en fonction de x, a et f.
   (c) Démontrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et que pour tout nombre entier naturel n, on a
   $$\forall x \in \mathbb{R} \quad f^{(n)}(x) = a^{n(n+1)/2} f(a^n x).$$
   (d) En déduire, pour tout nombre entier naturel n la valeur de $f^{(n)}(0)$.
2. Démontrer que, pour tout nombre réel x et tout nombre entier n, on a :
   $$f(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt.$$
   On pourra faire une récurrence et utiliser une intégration par parties
3. Soit A un nombre réel strictement positif.
   (a) Justifier l'existence d'un nombre réel positif ou nul M tel que :
   $$\forall x \in [-A, A], \quad |f(x)| \leq M$$
   et en déduire que pour tout nombre entier naturel n, on a :
   $$\forall x \in [-A, A], \quad |f^{(n)}(x)| \leq M$$
   .
   (b) Soit x un nombre réel apartenant à $[-A, A]$. Démontrer que, pour tout nombre entier naturel n, on a
   $$|f(x)| \leq M \frac{A^{n+1}}{(n+1)!}.$$
   (c) En déduire que $f(x) = 0$ pour tout $x \in [-A, A]$
   (d) Que peut-on en déduire sur la fonction f ?

Correction 3.

1. (a) f est continue sur $\mathbb{R}$ donc admet une primitive, notée F. On a par définition de l'intégrale $f(x) = F(ax) - F(0)$.
   (b) Une primitive est par définiton une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ donc F est de classe $\mathcal{C}^1$ et finalemtn f est de classe $\mathcal{C}^1$. On a
   $$f'(x) = aF'(ax) = af(ax).$$
   (c) On pose $P(n)$: " f est de classe C^n et $\forall x \in \mathbb{R} \quad f^{(n)}(x) = a^{n(n+1)/2} f(a^n x)$ ".

— $P(0)$ est vraie par hypothèse.

— Supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$ soit vraie. On a alors f de classe $\mathcal{C}^n$, et $\forall x \in \mathbb{R} \quad f^{(n)}(x) = a^{n(n+1)/2} f(a^n x)$. Or comme f est de classe $\mathcal{C}^1$ d'après la question précédente, on a alors que $f^{(n)}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ c'est à dire f de classe $\mathcal{C}^{n+1}$. Enfin $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= a^{n(n+1)/2} f'(a^n x) \\ &= a^{n(n+1)/2+n} a f(a a^n x) \quad \text{d'après la question précédente} \\ &= a^{n(n+1)/2+n+1} f(a^{n+1} x) \\ &= a^{(n+1)(n+2)/2} f(a^{n+1} x) \end{aligned}$$

— On a montré par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, f est de classe $\mathcal{C}^n$. Elle est donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ et $\forall x \in \mathbb{R} \quad f^{(n)}(x) = a^{n(n+1)/2} f(a^n x)$.

(d) On a donc $f^{(n)}(0) = a^{n(n+1)/2} f(0)$. Or $f(0) = \int_0^0 f(t)df = 0$ Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$f^{(n)}(0) = 0$$

2. On montre le résultat par récurrence. On pose pour tout nombre réel x et tout nombre entier n, la proposition $P(n)$: "$f(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt$."

— Réécrivons $P(0)$. On a $P(0)$: "$f(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^0}{0!} f^{(0+1)}(t)dt$.", c'est à dire : $f(x) = \int_0^x f'(t)dt$. Ce qui est vrai par définition de l'intégrale.

— Supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$ soit vraie. On a alors pour tout nombre réel x, $f(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt$. Comme suggérer par l'énoncé on fait une IPP. On pose

$u(t) = f^{(n+1)}(t)$ $\quad u'(t) = f^{(n+2)}(t)$

$v(t) = -\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}$ $\quad v'(t) = \frac{(x-t)^n}{n!}$

On a donc

$$f(x) = \left[\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(t)\right]_0^x - \int_0^x -\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)dt$$

Le crochet vaut $\frac{(x-x)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x) - \frac{(x-0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(0)$ les deux termes valent 0 (le second à l'aide de la question précédente). On obtient bien

$$f(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)dt$$

— Par récurrence la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. (a) Soit $A > 0$. Comme f est continue et $[-A, A]$ est un segment, le théorème de continuité sur un segment assure que f est bornée et atteint ses bornes. Donc il existe $M > 0$ tel que pour tout $x \in [-A, A]$, $|f(x)| \leq M$.

D'après 1c) on sait que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f^{(n)}(x) = a^{n(n+1)/2} f(a^n x)$ En particulier $|f^{(n)}(x)| = |a^{n(n+1)/2}||f(a^n x)|$ Or comme $|a| < 1$, $|a^{n(n+1)/2}| \leq 1$ et pour tout $x \in [-A, A]$, on a $a^n x \in [-A, A]$ et ainsi $|f(a^n x)| \leq M$. Au final pour tout $x \in [-A, A]$:

$$|f^{(n)}(x)| \leq M.$$

(b) D'après la question 2 on a : $f(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt$, donc $|f(x)| \leq \displaystyle\int_0^x \left|\frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\right| dt$ c'est l'inégatilité triangulaire sur les intégrales. On majore maintenant $\left|f^{(n+1)}(t)\right|$ à l'aide de la question précédente, on obtient pour tout $x \in [-A, A]$:

$$f(x) \leq M \int_0^x \left|\frac{(x-t)^n}{n!}\right| dt.$$

Donc $f(x) \leq M\left[\frac{|(x-t)|^{n+1}}{(n+1)!}\right]_0^x \leq M\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$ Or comme $x \in [-A, A]$ on a bien :

$$|f(x)| \leq M\frac{A^{n+1}}{(n+1)!}$$

(c) Par croissance comparée, en passant à la limite on a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{A^{n+1}}{(n+1)!} = 0$$

Ainsi le théorème des gendarmes assure que pour tout $x \in [-A, A]$ on a

$$\lim_{n\to\infty} f(x) = 0.$$

Evidemment $f(x)$ ne dépend pas de n donc par unicité de la limite $f(x) = 0$
Ceci étant vrai pour tout $x \in [-A, A]$ et comme A est arbitraire, ceci est vrai pour tout $x \in \mathbb{R}$.

$$f \equiv 0$$