DM vacances février

Exercice 1. Revoir les régles de calculs sur exp et ln[1] et leurs graphes et leurs limites...

Correction 1. A vous de travailler !

Exercice 2. Calculer les limites suivantes

1. $\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{\cos(\frac{\pi x}{2})}$
2. $\lim_{x\to 0} \frac{x\ln(x)}{e^x-1}$
3. $\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln(x^2)}{\ln(x+1)}$
4. $\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln(x)e^{x^2}}{x^x}$

Correction 2.

1. (FI $\frac{0}{0}$ - pas nécessaire sur une copie) On fait un changement de variable : $y = x-1$.
$$\frac{x-1}{\cos(\frac{\pi x}{2})} = \frac{y}{\cos(\frac{\pi y}{2}+\frac{\pi}{2})} = -\frac{y}{\sin(\frac{\pi y}{2})}$$
Or $\sin(u) \underset{0}{\sim} u$ et $\lim\limits_{y\to 0} \dfrac{\pi y}{2} = 0$ donc, $\sin(\frac{\pi y}{2}) \underset{0}{\sim} \frac{\pi y}{2}$. Ainsi
$$\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{\cos(\frac{\pi x}{2})} = \lim_{y\to 0} -\frac{y}{\sin(\frac{\pi y}{2})} = -\frac{2}{\pi}.$$
2. (FI $\frac{0}{0}$ - pas nécessaire sur une copie) D'après le cours $e^x - 1 \underset{0}{\sim} x$ donc $\frac{x\ln(x)}{e^x-1} \underset{0}{\sim} \ln(x)$ Ainsi :
$$\lim_{x\to 0} \frac{x\ln(x)}{e^x-1} = -\infty.$$
3. (FI $\frac{+\infty}{+\infty}$ - pas nécessaire sur une copie) $\ln(x^2) = 2\ln(x)$ et $\ln(x+1) = \ln(x) + \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \underset{+\infty}{\sim} \ln(x)$. Donc
$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln(x^2)}{\ln(x+1)} = 2$$
4. (FI $\frac{+\infty}{+\infty}$ - pas nécessaire sur une copie) La puissance est une fonction de la variable x, on passe donc à la forme exponentielle : $x^x = \exp(x\ln(x))$.
$$\begin{aligned}\frac{\ln(x)e^{x^2}}{x^x} &= \frac{\ln(x)\exp(x^2)}{exp(x\ln(x)} \\ &= \ln(x)\exp(x^2 - x\ln(x)) \\ &= \ln(x)\exp(x(x-\ln(x))\end{aligned}$$
Or $x - \ln(x) \to_{+\infty} +\infty$ par croissance comparée. Donc $\exp(x(x-\ln(x)) \to_{+\infty} +\infty$ et finalement
$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln(x)e^{x^2}}{x^x} = +\infty.$$

Exercice 3. Donner des équivalents simples de

1. Quand $x \to 1$ de $\frac{\ln(x)}{\sqrt{x^2-1}}$
2. Quand $x \to 0$ de $\frac{x\ln(x)}{e^x-1}$

---

1. $(\exp(a+b) = \exp(a)\exp(b)$, $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$...)

3. Quand $n \to +\infty$ de $\sum_{k=0}^{2n}(k^2+k)$

Correction 3.

1. On fait un changement de variable $y = x-1$, on obtient
$$\frac{\ln(x)}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{\ln(y+1)}{\sqrt{y^2+2y}}$$
Or $\ln(y+1) \underset{0}{\sim} y$ et $\sqrt{y^2+2y} = \sqrt{y(y+2)} \underset{0}{\sim} \sqrt{2}\sqrt{y}$ Donc
$$\frac{\ln(y+1)}{\sqrt{y^2+2y}} \underset{0}{\sim} \frac{y}{\sqrt{2}\sqrt{y}} \underset{0}{\sim} \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{2}}.$$
On revient à la variable x :
$$\frac{\ln(x)}{\sqrt{x^2-1}} \underset{1}{\sim} \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{2}}$$
2. On a déjà vu cette expression à l'exercice précédent : on obtient
$$\frac{x\ln(x)}{e^x-1} \underset{0}{\sim} \ln(x).$$
3.
$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{2n} k^2+k &= \sum_{k=0}^{2n} k^2 + \sum_{k=0}^{2n} k \\ &= \frac{2n(2n+1)(2(2n)+1)}{6} + \frac{2n(2n+1)}{2} \\ &= \frac{16n^3+R(n)}{6} + \frac{4n^2+2n}{2}\end{aligned}$$
où R est un polynôme (que je n'ai pas envie de calculer) de degré inférieur strictement à 3. Or en $+\infty$ une fonction polynomiale est équivalent à son terme de plus haut degré, on a donc :
$$\frac{16n^3+R(n)}{6} + \frac{4n^2+2n}{2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{16n^3}{6}$$
D'où
$$\sum_{k=0}^{2n} k^2+k \underset{+\infty}{\sim} \frac{8n^3}{3}$$

Exercice 4. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par
$$\begin{cases} u_0 &= 2 \\ u_{n+1} &= 1+\frac{1}{u_n}\end{cases}$$

1. Calculer u_1.
2. Etudiez la fonction $f : x \mapsto 1+\frac{1}{x}$. (Domaine de définition, limites et variations)
3. Résoudre $f(x) = x$. On note α l'unique solution dans $\mathbb{R}_+^*$.
4. Montrer que $u_1 < \alpha < 2$.
5. On note $I = [1,\alpha]$ et $J = [\alpha, 2]$. Montrer que $f(I) \subset J$ et $f(J) \subset I$.
6. On considère les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par
$$a_n = u_{2n} \quad b_n = u_{2n+1}.$$
Enfin on note A la fonction définie pour tout x par $A(x) = f\circ f(x)$. Montrer que $a_{n+1} = A(a_n)$. On peut montrer de manière similaire que $b_{n+1} = A(b_n)$, on ne demande pas de le prouver.

7. Soit F une fonction réelle. Soient $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ deux sous-ensembles de $\mathbb{R}$. Montrer que si $\mathcal{E} \subset \mathcal{F}$ alors $F(\mathcal{E}) \subset F(\mathcal{F})$. En déduire que I est stable par A. De même, on pourrait montrer que J est stable par A, on ne demande pas de le prouver.
8. Montrer que pour tout $x \in D_f$, $A(x) - x = \frac{-x^2+x+1}{x+1}$
9. Résoudre $A(x) \geq x$ sur $]0, +\infty[$.
10. En déduire que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
11. Montrer que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent, calculer leur limite.
12. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et calculer sa limite.
13. (a) Ecrire une fonction Python `u` qui prend en paramètre un entier n et qui renvoie la valeur de u_n
    (b) Ecrire une fonction Python `limiteu` qui prend en paramètre un reel $\epsilon > 0$ et qui renvoie la valeur de du premier rang $n_0 \geq 0$ tel que $|u_{n_0} - \ell| \leq \epsilon$

Correction 4.

1. $u_1 = \frac{3}{2}$
2. L'ensemble de définition est $\mathbb{R}^*$. f est dérivable sur son ensemble de définition et
$$f'(x) = \frac{-1}{x^2}$$
On obtient le tableau de variation suivant

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$	1	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	1

3. $\frac{1}{x} + 1 = x \iff x^2 - 1 - x = 0$ Dont les solutions sont $\{\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}\}$. L'unique solution dans $\mathbb{R}^+$ est $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$
4. $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \leq 2 \iff \sqrt{5} \leq 3 \iff 5 \leq 9$ qui est vrai.
$u_1 \leq \frac{1+\sqrt{5}}{2} \iff 2 \leq \sqrt{5} \iff 4 \leq 5$ qui est vrai.
5. $f(\alpha) = \alpha$, $f(2) = \frac{3}{2}$. comme f est décroissante sur J on a bien pour tout $x \in J$ $f(2) \leq f(x) \leq f(\alpha)$. Donc
$$\frac{3}{2} \leq f(x) \leq \alpha.$$
Comme $1 \leq \frac{3}{2}$ on a bient $f(J) \subset I$.
Un argument similaire montre que pour tout $x \in I$ on a :
$$\alpha = f(\alpha) \leq f(x) \leq f(1) = 2$$
et ainsi $f(I) \subset J$.
6. $\forall n \in \mathbb{N}$:
$$A(a_n) = f \circ f(a_n) = f \circ f(u_{2n}) = f(u_{2n+1}) = u_{2n+2} = a_{n+1}$$
7. On suppose donc que $\mathcal{E} \subset \mathcal{F}$. Soit $y \in F(\mathcal{E})$ c'est à dire qu'il existe $x \in \mathcal{E}$ tel que $f(x) = y$ Comme $\mathcal{E} \subset \mathcal{F}$,on a $x \in \mathcal{F}$, donc $y = f(x) \in \mathcal{F}$. Ainsi en tuilisant la question 5 on obtient :
$$f \circ f(I) \subset f(J) \subset I$$
8. $A(x) = f(f(x)) = f(1 + \frac{1}{x}) = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{x}} = \frac{2x+1}{x+1}$ Donc $A(x) - x = \frac{2x+1}{x+1} - x = \frac{2x+1-x^2-x}{x+1} = \frac{-x^2+x+1}{x+1}$
9. $A(x) - x \geq 0 \iff \frac{-x^2+x+1}{x+1}$ dont les solutions sur $\mathbb{R}_+^*$ sont $S =]0, \alpha[$.

10. $a_0 = u_0 \in J$, comme J est stable par A on déduit par récurrrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n \in J$. De même comme $u_1 = v_1 \in I$, et I est stable par A on déduit que $\forall n \in \mathbb{N},\ b_n \in I$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$a_{n+1} - a_n = A(a_n) - a_n$$

Comme $A(x) - x \leq 0$ sur J et $a_n \in J$, on a bien $a_{n+1} - a_n \leq 0$ donc $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
De même, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$b_{n+1} - b_n = A(b_n) - b_n$$

Comme $A(x) - x \geq 0$ sur I et $b_n \in I$, on a bien $b_{n+1} - b_n \geq 0$ donc $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

11. Les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont monotones et bornées. Elles sont donc convergentes d'après le théorème de la limite monotone. Notons ℓ_a la limite de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et ℓ_b la limite de $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (Nous n'avons pas montré que ces suites étaient adjacentes, nous ne pouvons pas directement dire que les limites sont identiques)
Par unicité de la limite $\lim_{n\to infty} a_{n+1} = \ell_a$. Comme A est continue sur $\mathbb{R}_+$ on a $\lim_{n\to\infty} A(a_n) = A(\ell_a)$. Ainsi ℓ_a vérifie $A(\ell_a) = \ell_a$. on a vu à la quetsion 9 que cette avait pour unique solution $\ell_a = \alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Le même argument montre que $\ell_b = \alpha$.

12. Les deux suites extraites u_{2n} et u_{2n+1} convergent et ont même limite. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc aussi convergente et a pour limite α.

13.
```python
from math import *
def u(n):
    x=0
    for i in range(n):
        x=1+1/x
    return(x)

def limiteu(epsilon):
    n=0
    l=(1+sqrt(5))/2
    while abs(u(n)-l)>epsilon:
        n=n+1
    return(n)

def limiteu2(epsilon): #autre solution
    n=0
    l=(1+sqrt(5))/2
    u=2
    while abs(u-l)>epsilon:
        n=n+1
        u=u+1/u
    return(n)


def limiteab(epsilon):
    n=0
    while abs(u(2*n)-u(2*n+1))>epsilon:
        n=n+1
    return(n)
```