DM de Noël

Exercice 1. Soit
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer B^T.
2. Calculer $-2A$
3. Calculer $-2A + B^T$

Correction 1.
$$B^T = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad -2A = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 0 & -4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et } -2A + B^T = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 2 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 2. Soit
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer A^2.
2. Calculer si cela est possible AB et BA

Correction 2. $A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ $AB = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 3 \\ 4 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ BA n'est pas possible.

Exercice 3. Soit
$$B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer BB^T puis $B^T B$

Correction 3. $BB^T = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$ et $BB^T = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

Exercice 4. Soit
$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer J^2 et J^3
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$J^n = \begin{pmatrix} 3^{n-1} & 3^{n-1} & 3^{n-1} \\ 3^{n-1} & 3^{n-1} & 3^{n-1} \\ 3^{n-1} & 3^{n-1} & 3^{n-1} \end{pmatrix}$$

Correction 4. $J^2 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = 3J$

$$J^3 = (J^2)J = (3J)J = 3J^2 = 3(3J) = 9J = \begin{pmatrix} 9 & 9 & 9 \\ 9 & 9 & 9 \\ 9 & 9 & 9 \end{pmatrix}$$

La question 2 se fait par récurrence.

Exercice 5. Soit
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer l'inverse de A et B si cela est possible.
2. Déterminer A^n. Question trop difficile sans indications... A remplacer par : montrer par récurrence que
$$A^n = \begin{pmatrix} 2^n & \frac{1}{5}2^n - \frac{1}{5}(-3)^n \\ 0 & (-3)^n \end{pmatrix}$$

Correction 5. $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-1}{6} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ B n'admet pas d'inverse (ce n'est pas une matrice carrée).

Soit P, la proposition $P(n)$: '$A^n = \begin{pmatrix} 2^n & \frac{1}{5}2^n - \frac{1}{5}(-3)^n \\ 0 & (-3)^n \end{pmatrix}$

Initialisation $P(1)$ est vraie. En effet on a d'une part :
$$A^1 = A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

et d'autre part :
$$\begin{pmatrix} 2^1 & \frac{1}{5}2^1 - \frac{1}{5}(-3)^1 \\ 0 & (-3)^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & \frac{2}{5} + \frac{3}{5} \\ 0 & -3 \end{pmatrix} = A$$

Heredité On suppose qu'il existe n tel que $P(n)$ soit vraie. On a donc $A^n = \begin{pmatrix} 2^n & \frac{1}{5}2^n - \frac{1}{5}(-3)^n \\ 0 & (-3)^n \end{pmatrix}$

Ainsi
$$A^{n+1} = A^n A = \begin{pmatrix} 2^n & \frac{1}{5}2^n - \frac{1}{5}(-3)^n \\ 0 & (-3)^n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

On effectue le calcul du produit et on obtient :
$$A^{n+1} = \begin{pmatrix} 2 \times 2^n & 2(\frac{1}{5}2^n - \frac{1}{5}(-3)^n) + (-3)^n \\ 0 & (-3) \times (-3)^n \end{pmatrix}$$

Les coefficients diagonaux se calculent simplement et donnent : 2^{n+1} et $(-3)^{n+1}$. Le coefficient en haut à droite de la matrice se simplifie de la manière suivante :

$$\begin{aligned} 2(\frac{1}{5}2^n - \frac{1}{5}(-3)^n) + (-3)^n &= \frac{2}{5}2^n - \frac{2}{5}(-3)^n + (-3)^n \\ &= \frac{1}{5}2^{n+1} + (-\frac{2}{5}+1)(-3)^n \\ &= \frac{1}{5}2^{n+1} + (\frac{3}{5})(-3)^n \\ &= \frac{1}{5}2^{n+1} - (\frac{-3}{5})(-3)^n \\ &= \frac{1}{5}2^{n+1} - (\frac{1}{5})(-3)^{n+1} \end{aligned}$$

Ainsi

$$A^{n+1} = \begin{pmatrix} 2^{n+1} & \frac{1}{5}2^{n+1} - \frac{1}{5}(-3)^{n+1} \\ 0 & (-3)^{n+1} \end{pmatrix}$$

et la propriété $P(n+1)$ est donc vraie.

Conclusion Par principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$A^n = \begin{pmatrix} 2^n & \frac{1}{5}2^n - \frac{1}{5}(-3)^n \\ 0 & (-3)^n \end{pmatrix}$$

Exercice 6. Soit A une matrice et P une matrice inversible.

1. A-t-on $(AP)^2 = A^2P^2$?
2. Montrer qu'on a en revanche :

$$(P^{-1}AP)^2 = P^{-1}A^2P$$

3. Puis par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$(P^{-1}AP)^n = P^{-1}A^nP$$

Correction 6.

1. Aucune raison que cela ce passe comme ca. $(AP)^2 = (AP)(AP) = APAP$. Mais comme en général on n'a pas $AP = PA$ on ne peut rien dire de plus.
2. On utilise le fait que $PP^{-1} = \text{Id}$ et $\text{Id} \times A = A$

$$\begin{aligned} (P^{-1}AP)^2 &= (P^{-1}AP)(P^{-1}AP) \\ &= (P^{-1}A(PP^{-1})AP) \\ &= (P^{-1}AIdAP) \\ &= (P^{-1}AAP) \\ &= (P^{-1}A^2P) \end{aligned}$$

On pose $P(n) :' (P^{-1}AP)^n = P^{-1}A^nP$

Initialisation Pour $n = 0$ et $n = 1$ c'est trivial. Pour $n = 2$ c'ets la question précédente.

Hérédité On suppose qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$ soit vraie. On a alors

$$(P^{-1}AP)^{n+1} = (P^{-1}AP)^n (P^{-1}AP)$$

et donc par Hypothése de récurrence :

$$\begin{aligned}(P^{-1}AP)^{n+1} &= (P^{-1}A^n P)(P^{-1}AP) \\ &= (P^{-1}A^n PP^{-1}AP) \\ &= (P^{-1}A^n \,\mathrm{Id}\, AP) \\ &= (P^{-1}A^n AP) \\ &= (P^{-1}A^{n+1}P)\end{aligned}$$

Conclusion $P(n)$ est vraie pour tout n.

Exercice 7. Soit

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer P^{-1}
2. Calculer $P^{-1}AP$

Correction 7. Par la méthode du pivot de Gauss on obtient :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Le calcul donne :

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Exercice 8. Soit

$$A_x = \begin{pmatrix} 0 & 2 & x \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer le rang de A_x en fonction de x.
2. Donner l'inverse de A_x quand cela a un sens.

Correction 8. Si $x=1$, A_x est de rang 2, sinon A_x est de rang 3
Si $x\neq 1$, A_x admet un inverse qui vaut :

$$A_x^{-1}=\frac{1}{2(1-x)}\begin{pmatrix} 0 & (x-1) & (1-x) \\ 1 & -x & 0 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

(Pour calculer l'inverse de A_x il faut faire un pivot de Gauss avec la « matrice augmentée » (celle où on met A_x à gauche et l'identité à droite)

Exercice 9. Soit

$$A_\lambda=\begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 0 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

1. Calculer le rang de A_λ en fonction de λ.
2. Donner l'inverse de A_λ quand cela a un sens.

Correction 9. Si $\lambda 2$ ou si $\lambda=1$ le rang vaut 1. Sinon le rang vaut 2
Si $\lambda\notin\{1,2\}$ alors

$$A_\lambda^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{1-\lambda} & -\frac{2}{(1-\lambda)(2-\lambda)} \\ 0 & \frac{1}{2-\lambda} \end{pmatrix}$$

Exercice 10. Soit A la matrice

$$A=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Résoudre le système $AX=\lambda X$ d'inconnue $X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ où λ est un paramètre réel.
2. Soit $e_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $e_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, et $e_3=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Calculer Ae_1, Ae_2 et Ae_3.
3. Montrer par récurrence que $A^ne_1=e_1$.
4. Donner de même la valeur de A^ne_2 et A^ne_3.
5. Soit $P=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$
   Montrer que P est inversible et calculer son inverse.
6. Soit $D=P^{-1}AP$. Calculerr D.
7. Montrer par récurrence que $D^n=P^{-1}A^nP$
8. En déduire la valeur de A^n.

9. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites définies par : $x_0 = 1, y_0 = 1$ et $z_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$\left\{\begin{array}{lll} x_{n+1} & = & -y_n + z_n \\ y_{n+1} & = 4x_n & +y_n - 2z_n \\ z_{n+1} & = 2x_n & -2x_n + z_n \end{array}\right.$$
Soit $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$
Montrer que $X_{n+1} = AX_n$.
10. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$X_n = A^n X_0$$
11. En déduire le terme général de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en fonction de n.

Correction 10.

1. $AX = \lambda X \iff \left\{\begin{array}{rrrl} & -y & +z = & \lambda x \\ 4x & +y & -2z = & \lambda y \\ 2x & -2y & +z = & \lambda z \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rrrl} -\lambda x & -y & +z = & 0 \\ 4x & +(1-\lambda)y & -2z = & 0 \\ 2x & -2y & +(1-\lambda)z = & 0 \end{array}\right.$
Ensuite on échelonne le système (Après beaucoup de fautes de calculs) on obtient :
$$\iff \left\{\begin{array}{rrrl} 2x & -2y & +(1-\lambda)z = & 0 \\ 0 & +(5-\lambda)y & (-4+2\lambda)z = & 0 \\ 0 & (-\lambda-1)y & +\frac{1}{2}(2-\lambda-\lambda^2)z = & 0 \end{array}\right.$$
$$\iff \left\{\begin{array}{rrrl} 2x & -2y & +(1-\lambda)z = & 0 \\ 0 & +(5-\lambda)y & 2(\lambda-2)z = & 0 \\ 0 & -(\lambda+1)y & -\frac{1}{2}(\lambda+1)(\lambda-2)z = & 0 \end{array}\right.$$
$$\iff \left\{\begin{array}{rrrl} 2x & +(1-\lambda)z & -2y = & 0 \\ 0 & +2(\lambda-2)z & +(5-\lambda)y = & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}(\lambda+1)(\lambda-2)z & -(\lambda+1)y = & 0 \end{array}\right.$$
et enfin $L_3 \leftarrow L_3 + \frac{1}{4}(\lambda+1)L_2$ donne :
$$\iff \left\{\begin{array}{rrrl} 2x & +(1-\lambda)z & -2y = & 0 \\ 0 & +2(\lambda-2)z & +(5-\lambda)y = & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4}(-\lambda^2+1)y = & 0 \end{array}\right.$$
$$\iff \left\{\begin{array}{rrrl} 2x & +(1-\lambda)z & -2y = & 0 \\ 0 & +2(\lambda-2)z & +(5-\lambda)y = & 0 \\ 0 & 0 & (-\lambda+1)(\lambda+1)y = & 0 \end{array}\right.$$
Donc si $\lambda - 2 \neq 0$ et $(-\lambda+1)(\lambda+1) \neq 0$, le système est de rang 3. Il admet une unique solution à savoir $S = \{(0, 0, 0)\}$

Si $\lambda = 1$ Le système équivaut à

$$\left\{\begin{array}{cccc} 2x & & -2y = & 0 \\ 0 & -2z & 4y = & 0 \\ 0 & 0 & 0 = & 0 \end{array}\right.$$

Il est échelonné de rang 2. Les solutions sont de la forme :

$$\mathcal{S} = \{(y, y, 2y)\, y \in \mathbb{R}\}$$

Si $\lambda = 2$ Le système équivaut à

$$\left\{\begin{array}{cccc} 2x & -z & -2y = & 0 \\ 0 & & 3y = & 0 \\ 0 & 0 & -3y = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{cccc} 2x & -z & -2y = & 0 \\ 0 & & 3y = & 0 \\ 0 & 0 & 0 = & 0 \end{array}\right.$$

Il est échelonné de rang 2. Les solutions sont de la forme :

$$\mathcal{S} = \{(2x, 0, x)\, x \in \mathbb{R}\}$$

Si $\lambda = -1$ Le système équivaut à

$$\left\{\begin{array}{cccc} 2x & +2z & -2y = & 0 \\ 0 & -6z & 6y = & 0 \\ 0 & 0 & 0 = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{cccc} 2x & +2z & -2y = & 0 \\ 0 & z & = & y \end{array}\right.$$

Il est échelonné de rang 2. Les solutions sont de la forme :

$$\mathcal{S} = \{(0, y, y)\, y \in \mathbb{R}\}$$

2. $Ae_1 = e_1$, $Ae_2 = 2e_2$ et $Ae_3 = -e_3$
3. C'est vrai pour $n = 1$. On suppose que le résultat est vrai pour un certain entier $n \in \mathbb{N}$, on a alors $A^{n+1}e_1 = AA^n e_1 = Ae_1$ par HR. Puis $Ae_1 = e_1$ d'après la question précédente. On a alors $A^{n+1}e_1 = e_1$. Par récurrence le résultat est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$
4. $A^n = 2^n e_2$ et $A^n e_3 = (-1)^n e_3$
5. cf ex 8
$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
6. cf ex 8 $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$
7. cf ex 6

8. $A^n = PD^nP^{-1}$ Or $D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix}$ (ca ne marche QUE pour les matrices diagonales)
   Donc
   $$A^n = \begin{pmatrix} 2-2^n & 1-2^n & -1+2^n \\ 2-2(-1)^n & 1 & -1+(-1)^n \\ 4-2^{n+1}-2(-1)^n & 2-2^{n+1} & -2+2^{n+1}+(-1)^n \end{pmatrix}$$
9. $X_{n+1} = \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix}$
   et $AX_n = A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y_n + z_n \\ 4x_n + y_n - 2z_n \\ 2x_n - 2y_n + z_n \end{pmatrix}$
   Ce qui est bien le système vérifiée par les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}, (z_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
10. C'est vrai pour $n = 0$ ($A^0 = \mathrm{Id}$) C'est aussi vrai pour $n = 1$ (calcul) On suppose le résultat vrai pour UN $n \in \mathbb{N}$ On a alors : $X_n = A^n X_0$ et donc $AX_n = A^{n+1}X_0$. Or d'après la question précédente $AX_n = X_{n+1}$. La propriété est donc héréditaire et donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
11. On fait le calcul de $A^n X_0$ grace au résultat trouvé à la question 8. On obtient
   $$x_n = 2 - 2^n + 1 - 2^n - 1 + 2^n = 2 - 2^n$$