DM de Noël

Exercice 1. Soit
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer B^T.
2. Calculer $-2A$
3. Calculer $-2A + B^T$

Exercice 2. Soit
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer A^2.
2. Calculer si cela est possible AB et BA

Exercice 3. Soit
$$B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer BB^T puis $B^T B$

Exercice 4. Soit
$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer J^2 et J^3
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$J^n = \begin{pmatrix} 3^{n-1} & 3^{n-1} & 3^{n-1} \\ 3^{n-1} & 3^{n-1} & 3^{n-1} \\ 3^{n-1} & 3^{n-1} & 3^{n-1} \end{pmatrix}$$

Exercice 5. Soit
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer l'inverse de A et B si cela est possible.
2. Déterminer A^n.

Exercice 6. Soit A une matrice et P une matrice inversible.

1. A-t-on $(AP)^2 = A^2P^2$?

2. Montrer qu'on a en revanche :

$$(P^{-1}AP)^2 = P^{-1}A^2P$$

3. Puis par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$(P^{-1}AP)^n = P^{-1}A^nP$$

Exercice 7. Soit

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer P^{-1}
2. Calculer $P^{-1}AP$

Exercice 8. Soit

$$A_x = \begin{pmatrix} 0 & 2 & x \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer le rang de A_x en fonction de x.
2. Donner l'inverse de A_x quand cela a un sens.

Exercice 9. Soit

$$A_\lambda = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 0 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

1. Calculer le rang de A_λ en fonction de λ.
2. Donner l'inverse de A_λ quand cela a un sens.

Exercice 10. Soit A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Résoudre le système $AX = \lambda X$ d'inconnue $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ où λ est un paramètre réel.
2. Soit $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, et $e_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Calculer Ae_1, Ae_2 et Ae_3.
3. Montrer par récurrence que $A^n e_1 = e_1$.
4. Donner de même la valeur de $A^n e_2$ et $A^n e_3$.

5. Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

   Montrer que P est inversible et calculer son inverse.

6. Soit $D = P^{-1}AP$. Calculerr D.
7. Montrer par récurrence que $D^n = P^{-1}A^nP$
8. En déduire la valeur de A^n.
9. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites définies par : $x_0 = 1, y_0 = 1$ et $z_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} x_{n+1} & = & & -y_n + z_n \\ y_{n+1} & = 4x_n & & +y_n - 2z_n \\ z_{n+1} & = 2x_n & & -2x_n + z_n \end{cases}$$

   Soit $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$

   Montrer que $X_{n+1} = AX_n$.

10. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$X_n = A^n X_0$$

11. En déduire le terme général de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en fonction de n.