Devoir Vacances

Lundi 25/10/2021

Correction 1.

1. $D_f = \mathbb{R}^*$, $f'(x) = (2x+1)e^{-\frac{1}{x}}$
2. $\sqrt{\frac{n!}{2}}$ $(\neq \frac{(\sqrt{n})!}{\sqrt{2}})$
3. $\frac{(n+3)(n+4)}{2} - 1$
4. $u_n = -\frac{1}{2^n} + 2$
5. $\mathcal{S} = \{(-2, 5)\}$

Mardi 26/10/2021

Correction 2.

1. $D_f = \mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{e^x+2x}{e^x+x^2}$
2. $\frac{1}{2}\left(\left(\frac{3}{2}\right)^n - 1 - \frac{1}{2^n}\right)$
3. $\mathcal{S} = \{(-2, 3, 2)\}$
4. 8
5. $u_n = 2^n \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)$

Mercredi 27/10/2021

Correction 3.

1. $D_f = \mathbb{R}$, $f'(x) = (\cos(x) - x\sin(x))e^{x\cos(x)}$
2. Soit $S_n = \sum_{i=0}^{n}(2x)^{2i}$, (Remarque : $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est quasiment sous la forme d'une somme d'une suite géométrique. On utilise $a^{nm} = (a^n)^m$))

$$S_n = \sum_{i=0}^{n}((2x)^2)^i = \sum_{i=0}^{n}(4x^2)^i$$

On applique ensuite la formule du cours : Si $x^2 \neq \frac{1}{4}$:

$$S_n = \frac{1-(4x^2)^{n+1}}{1-4x^2}$$

Et donc : $S_n = \frac{1-(4x^2)^{n+1}}{1-4x^2} = \frac{1-4^{n+1}x^{2n+2}}{1-4x^2}$ si $x^2 \neq \frac{1}{4}$
$S_n = n+1$ si $x^2 = \frac{1}{4}$

3. Soit $v_n = u_n - \ell$ avec $\ell \in \mathbb{R}$. On cherche ℓ afin que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit géométrique.

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - \ell \\ &= 2u_n + 1 - \ell \\ &= 2(v_n + \ell) + 1 - \ell \\ &= 2v_n + \ell + 1 \end{aligned}$$

Ainsi, en prenant $\ell = -1$, on obtient $v_n = u_n + 1$ qui est une suite géométrique de raison 2. Donc $v_n = v_0 2^n$ et $v_0 = u_0 + 1 = 2$. On obtient donc $v_n = 2^{n+1}$. En revenant à u_n cela donne :

$$\boxed{u_n = v_n - 1 = 2^{n+1} - 1}$$

4. 0
5. $\mathcal{S} = \{\sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$

Jeudi 28/10/2021

Correction 4.

1. $D_f = \mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{6\sin^2(2x)\cos(2x)(2+\cos(5x) - 5\sin^3(2x)\sin(5x)}{(2+\cos(5x))^2}$
2. On étudie $D(x) = e^x - (x+1)$, définie sur $\mathbb{R}$ et $D'(x) = e^x - 1$. $D'(x) \geq 0 \iff x \geq 0$. Le minimum de D est obtenu en 0 et vaut $e^0 - (0+1) = 0$ donc $D(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Donc $e^x \geq x + 1$
3. Soit $S_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} (k^2 + 1)$

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=2}^{n} k^2 + \sum_{k=2}^{n} 1 \quad \text{linéarité} \\ &= \sum_{k=1}^{n} k^2 - 1^2 + (n-1) \quad \text{n-1 nombre entre 2 et n} \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 1 + n - 1 \quad formuleducours \end{aligned}$$

$$\boxed{S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + n - 2}$$

4. $\mathcal{S} = \{(0, 0, 1)\}$
5.

```
def somme_harmonique(n):
    S=0
    for k in range(1,n+1):
        S=S+1/k
    return(S)
```

Vendredi 29/10/2021

Correction 5.

1. $$f(x)=\left(\frac{\sqrt{x^2+3x}}{3^x}\right)^4$$

   Rappelons que $3^x = exp(x\ln(3))$ est définie sur $\mathbb{R}$ et strictectement positif.
   Donc f est définie pour tout x vérifiant $x^2+3x \geq 0$ c'est à dire $x(x+3)\geq 0$ soit $D_f =]-\infty,-3]\cup[0,+\infty[$. Et f est dérivable sur $]-\infty,-3[\cup]0,+\infty[$.
   On simplifie f en utilisant la puissance 4 : on a

   $$f(x)=\frac{(x^2+3x)^2}{3^{4x}}.$$

   Maintenant on utilise la formule de la dérivée d'un quotient $f(x)=\frac{u(x)}{v(x)}$ avec $u(x)=(x^2+3x)^2$ et $v(x)=3^{4x}=\exp(4x\ln(3))$.
   Calculons les dérivées de ces deux fonctions :

   $$u'(x)=2(2x+3)(x^2+3x)$$

   et

   $$v'(x)=4\ln(3)\exp(4x\ln(3))=4\ln(3)3^{4x}$$

   On obtient alors :

   $$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{(v(x))^2} \\ &= \frac{2(2x+3)(x^2+3x)3^{4x}-(x^2+3x)^2 4\log(3)3^{4x}}{3^{8x}} \end{aligned}$$

2. 0
3. $u_n = 1$
4. 0
5.

```
from random import randint
def lancer_de_de():
    de=randint(1,6)
    return(de)
```

Samedi 30/10/2021

Correction 6.

1. On étudie $D(X)=\ln(1+X)-X$ sur $\mathbb{R}_+$. $D(X)\leq 0 \iff \ln(1+X)\leq X \iff 1+X\leq e^X$ qui est vrai pour tout $X\in\mathbb{R}$ d'aprés l'ex 4. Donc $\ln(1+X)\leq X$ pour tout $X\geq 0$. Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $x^2\geq 0$ donc $D(x^2)\leq 0$ c'est-à-dire $\ln(1+x^2)\leq x^2$
2. $D_f=[1,+\infty[$ et dérivable sur $]1,+\infty[$.
$$f'(x)=\frac{1+\sqrt{x^2-1}}{x^2-1+x\sqrt{x^2-1}}$$
3. 1
4. $\mathcal{S}=\{(2-y,y-1)\,|\,y\in\mathbb{R}\}=\{(x,2-x,-1)\,|\,x\in\mathbb{R}\}$
5.
```
from math import *
def solution(x,y,z):
   L_1= (pi**2)*x +1.4*y +z
   L_2= log(2)*x+1.7*y +(2**4)*z
   if L_1==120 and L_2==0:
      return(True)
   else:
      return(False)
```
def solutio

Dimanche 31/10/2021

REPOS!

Lundi 01/11/2021

Correction 7.

1. $D_f=]1,+\infty[$, $f'(x)=\frac{1}{x\ln(x)}$
2. $f(x)=x^x=e^{x\ln(x)}$ $D_f=]0,+\infty[$ $f'(x)=(1+\ln(x))e^x x\ln(x)$, $f'(x)\geq 0\iff x\in]e^{-1},+\infty[$

x	0		e^{-1}		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	$\searrow$	$\frac{1}{e^e}$	$\nearrow$	$+\infty$

3. $u_n=\exp(\ln(2)(2^n-1))=2^{2^n-1}$
4. $\mathcal{S}=\{(-1,1,0)\}$
5. $\frac{1}{2}$

Mardi 02/11/2021

Correction 8.

1. $D_f =]-2, -\frac{2}{3}[\cup]\frac{2}{3}, +\infty[$

$$f'(x) = \frac{-4-18x}{\sqrt{9x^2-4}(x+2)}$$

2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} q^k = \frac{1-q^n}{1-q}$ pour $q \neq 1$.
   On a donc

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{ik\pi}{n}} &= \sum_{k=0}^{n-1} \left(e^{\frac{i\pi}{n}}\right)^k \\ &= \frac{1-e^{\frac{i\pi}{n}}{}^n}{1-e^{\frac{i\pi}{n}}} \\ &= \frac{1-e^{i\pi}}{1-e^{\frac{i\pi}{n}}} \\ &= \frac{2}{1-e^{\frac{i\pi}{n}}}\end{aligned}$$

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{ik\pi}{n}} = \frac{2}{1-e^{\frac{i\pi}{n}}}}$$

$$\begin{aligned}\prod_{k=0}^{n} e^{\frac{ik\pi}{n}} &= e^{\sum_{k=0}^{n} \frac{ik\pi}{n}} \\ &= e^{i\pi\frac{n(n+1)}{2n}} \\ &= e^{i\pi\frac{n+1}{2}}\end{aligned}$$

3. $\frac{1}{2}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + n\right)$

4.
```
from random import randint
def somme_des_lancers(n):
  S=0
  for i in range(n):
    S=S+randin(1,6)
  return(S)
```

5. Notons (E) l'équation $\sqrt{x+1} \leq x$.
   L'ensemble de définition de l'équation est $D = [-1, +\infty[$. Afin de mettre au carré on distingue les deux cas :

— Cas 1 : $x \geq 0$.
Alors $(E) \iff x+1 \leq x^2 \iff x^2 - x - 1 \geq 0$ On factorise $x^2 - x - 1$ à l'aide des racines $r_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, on obtient

$$(E) \iff (x - r_1)(x - r_2) \geq 0$$

Donc $x \in]-\infty, r_1] \cup [r_2, +\infty[$, or on est dans le cas $x \geq 0$ on a donc

$$\boxed{\text{cas 1 } x \in [\tfrac{1+\sqrt{5}}{2}, +\infty[}$$

— Cas 2 : $x < 0$.
Comme pour tout $x \in D$, $\sqrt{x+1} \geq 0$, l'équation (E) n'est jamais vérifiée.

$$\boxed{\text{cas 2 : pas de solution}}$$

Au final les solutions de (E) sont

$$\boxed{\mathcal{S} = \left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}, +\infty\right[}$$

Mercredi 03/11/2021

Correction 9.

1. Soit $P(n)$: " $\prod_{k=1}^{n} k! = \prod_{k=1}^{n} k^{n+1-k}$"

(Initialisation) $P(1)$: " $\prod_{k=1}^{1} k! = \prod_{k=1}^{1} k^{1+1-k}$"

$$\prod_{k=1}^{1} k! = 1! = 1$$

et

$$\prod_{k=1}^{1} k^{1+1-k} = 1^{2-1} = 1$$

$P(1)$ est vraie.

Hérédité.
On suppose qu'il existe n tel que $P(n)$ soit vraie et montrons $P(n+1)$

$$\prod_{k=1}^{n+1} k! = (n+1)! \prod_{k=1}^{n} k!$$

Par hypothèse de récurrence on a

$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^{n+1} k! &= (n+1)! \prod_{k=1}^{n} k^{n+1-k} \\ &= \prod_{k=1}^{n+1} k \prod_{k=1}^{n} k^{n+1-k} \\ &= (n+1) \prod_{k=1}^{n} k \prod_{k=1}^{n} k^{n+1-k} \\ &= (n+1) \prod_{k=1}^{n} k \times k^{n+1-k} \\ &= (n+1) \prod_{k=1}^{n} k^{n+2-k}\end{aligned}$$

Or $(n+1) = (n+1)^1 = (n+1)^{n+2-(n+1)}$. Donc $(n+1)\prod_{k=1}^{n} k^{n+2-k} = \prod_{k=1}^{n+1} k^{n+2-k}$
Et finalement

$$\prod_{k=1}^{n+1} k! = \prod_{k=1}^{n+1} k^{n+2-k}$$

ainsi, $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion :
Par principe de récurrence $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq 0$.

2. $D_f = \mathbb{R}^*$, $f'(x) = \pi(e^{2x} - 1)^{\pi-1}$
3. $u_n = 2^n$
4. $\mathcal{S} = \{(-1, 1, 0)\}$
5.
```python
from math import sqrt
def double_somme(n):
   S=0
   for j in range(1,n+1):
      for k in range(1,n+1):
         S=S+sqrt(j)/k
   return(S)
```

Jeudi 04/11/2021

Correction 10.

1. $D_f = \mathbb{R}_+^*$

$$f'(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right) \exp\left(\frac{1}{x}\right)$$

2. $D_f = \mathbb{R}^2$

$$f'(x) = \frac{-e^{\frac{-x^2}{2}}}{\sqrt{e^{\frac{-x^2}{2}+1}}}$$

3. Si $\lambda = \frac{1}{2}$,

$$\mathcal{S} = \emptyset.$$

   Si $\lambda \neq \frac{1}{2}$,

$$\mathcal{S} = \{\left(\frac{-1}{2\lambda-1}, \frac{\lambda}{2\lambda-1}\right)\}$$

4. $+\infty$

5.
```
def minimum(a,b):
    if a<=b:
        return(a)
    else:
        return(b)
```

Vendredi 05/11/2021

Correction 11.

1. $D_f =]-\infty, 0[$ $f'(x) = \frac{1}{x}$ (ce n'est pas une erreur de signe)
2. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$

$$f'(x) = \frac{2\exp(x)\ln(x^2) - 2\exp(x)\frac{2}{x}}{(\ln(x^2))^2}$$

3.
```
def double_somme2(n):
    S=0
    for i in range(1,n+1):
        for j in range(1,n+1):
            if i<j:
                S=S+i
            else:
                S=S+j
    return(S)
```

4. $\mathcal{S} = \left[\frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right] \cup [1, +\infty[$
5.

$$u_n \leq \frac{1}{n!}(n! + \sum_{k=0}^{n-1} k!)$$

$\forall k \in [\![1, n-1]\!]\ k! \leq (n-1)!$

$$\begin{aligned} u_n &\leq 1 + \frac{1}{n!}(\sum_{k=0}^{n-1}(n-1)!) \\ &\leq 1 + \frac{1}{n!}(n(n-1)!) \\ &\leq 1+1 \\ &\leq 2 \end{aligned}$$

Limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{1}{n!}\left(n! + (n-1)! + \sum_{k=0}^{n-2} k!\right) \\ &= 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n-2} k! \end{aligned}$$

Or

$$\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n-2} k! \leq \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n-2}(n-2)! = \frac{1}{n!}(n-1)! \leq \frac{1}{n}$$

Donc

$$1 \leq u_n \leq 1 + \frac{2}{n}$$

Le théorème des gendarmes implique que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1.

Samedi 06/11/2021

Correction 12.

1. $D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi \,|\, k \in \mathbb{Z}\right\}$

$$f'(x) = \frac{-1-\tan^2(x)}{\tan^2(x)} = \frac{-1}{\tan^2(x)} - 1 = \frac{-1}{\sin^2(x)}$$

2. $D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \,|\, k \in \mathbb{Z}\right\}$

$$f'(x) = -\tan(x)$$

3. $\frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$
4. $\frac{1}{4}$

5.
```
def partie_entiere{x}:
    if x>0:
        n=0
        while n<=x:
            n=n+1
        return(n)
    else:
        n=0
        while n>x:
            n=n-1
        return(n)
```

Dimanche 07/11/2021

Correction 13.

1. $D_f = \mathbb{R}$ $f'(x) = 2x(1+\exp(x))^3 + 3x^2\exp(x)(1+\exp(x))^2$
2. e
3. $u_n = (1+3n)\frac{1}{2^n}$
4. Si $\lambda = 0$

$$\mathcal{S} = \emptyset$$

   Si $\lambda \neq 0$

$$\mathcal{S} = \left\{ \left(\frac{1-\lambda}{\lambda^2}, \frac{-1}{\lambda} \right) \right\}$$

5. $\mathcal{S} = [\frac{\ln(2)}{2}, +\infty[$