Correction DM1

Exercice 1. Soit f définie par $f(x) = \frac{x+2}{2x+1}$.
Exprimer $A = \{x \in \mathbb{R}^+ \mid f(x) \geq 1\}$ sous la forme d'un intervalle puis donner $\inf(A)$.
Faire de même avec $B = \{f(x) \mid x \in \mathbb{R}^+\}$.

Correction 1. Résolvons $f(x) \geq 1$ qui donne la condition sur x d'appartenance à l'ensemble A :

$$\begin{aligned} f(x) &\geq 1 \\ \frac{x+2}{2x+1} - 1 &\geq 0 \\ \frac{-x+1}{2x+1} &\geq 0 \end{aligned}$$

Les solutions sont donc $\mathcal{S} = \left]\frac{-1}{2}, 1\right]$

Donc

$$\boxed{A = \mathbb{R}^+ \cap \left]\frac{-1}{2}, 1\right] = [0, 1] \text{ et } \inf A = 0}$$

Etudions f afin d'expliciter B. f est définie et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{\frac{-1}{2}\}$ et

$$f'(x) = \frac{2x+1-2(x+2)}{(2x+1)^2} = \frac{-3}{(2x+1)^2}$$

Ainsi f est décroissante sur $]-\infty, \frac{-1}{2}[$ et sur $]\frac{-1}{2}, +\infty[$. Par ailleurs, $f(0) = 2$ (on s'intéresse à $f(0)$ car la condition dans B est $x \in \mathbb{R}^+$) et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \dfrac{1}{2}$ donc

$$\boxed{B = \left]\frac{1}{2}, 2\right] \text{ et } \inf(B) = \frac{1}{2}}$$

Exercice 2. Simplifier au maximum

$$\frac{\left(1 - \frac{y^2}{x^2}\right)^a \left(1 + \frac{x}{y}\right)^a}{(x+y)^{2a}}$$

Correction 2.

$$\begin{aligned} \frac{\left(1 - \frac{y^2}{x^2}\right)^a \left(1 + \frac{x}{y}\right)^a}{(x+y)^{2a}} &= \frac{(x^2-y^2)^a (y+x)^a}{x^{2a} y^a (x+y)^{2a}} \\ &= \frac{(x-y)^a (y+x)^a (y+x)^a}{x^{2a} y^a (x+y)^{2a}} \\ &= \frac{(x-y)^a}{x^{2a} y^a} \end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{\left(1 - \frac{y^2}{x^2}\right)^a \left(1 + \frac{x}{y}\right)^a}{(x+y)^{2a}} = \frac{(x-y)^a}{x^{2a} y^a}}$$

Exercice 3. Calculer $1001^2 - 999^2$ (sans calculette)

Correction 3.

$$1001^2 - 999^2 = (1001 - 999)(1001 + 999) = 2(2000) = \boxed{4000}$$

Exercice 4. Résoudre pour $x \in \mathbb{R}$ l'inéquation

$$\frac{1}{x+1} \leq \frac{x}{x+2}.$$

Correction 4. Le fomaine de définition est $\mathbb{R} \setminus \{-1, -2\}$. Sur ce domaine l'équation est équivalente à

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x+1} - \frac{x}{x+2} &\leq 0 \\
\frac{x+2-x(x+1)}{(x+1)(x+2)} &\leq 0 \\
\frac{-x^2+2}{(x+1)(x+2)} &\leq 0 \\
\frac{x^2-2}{(x+1)(x+2)} &\geq 0 \geq \\
\frac{(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})}{(x+1)(x+2)} &\geq 0
\end{aligned}$$

Tableau de signe. Les solutions sont

$$\boxed{\mathcal{S} =]-\infty, -2[\cup [-\sqrt{2}, -1[\cup [\sqrt{2}, +\infty[.}$$

Exercice 5. Donner l'ensemble de définition de $f(x) = \sqrt{(x^2-4)\ln\left(\frac{1}{x}\right)}$

Correction 5.

Le logarithme est défini sur $\mathbb{R}_+^*$, on obtient donc comme condition

$$\frac{1}{x} > 0$$

Cette condition équivaut à $x > 0$.

La racine est définie sur $\mathbb{R}^+$ donc on obtient comme deuxième condition

$$(x^2-4)\ln(\frac{1}{x}) \geq 0.$$

Ceci équivaut à $(x-2)(x+2)\ln(x) \leq 0$ et un tableau de signe donne comme solution $[1, 2]$. Ce dernier ensemble est donc l'ensemble de définition de f :

$$\boxed{D_f = [1, 2]}$$