DM 12

Exercice 1. Pour tout réel $t > 0$, on note P_t le polynôme $X^5 + tX - 1 \in \mathbb{R}_5[X]$. Le but de ce problème est d'étudier les racines de P_t en fonction de $t > 0$.

1. On fixe $t > 0$ pour cette question. Prouver que P_t admet une unique racine notée $f(t)$.
2. Montrer que $f(t) \in]0, 1[$ pour tout $t > 0$.
3. Montrer que f est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$ (On pourra considérer deux réels t_1, t_2 tel que $t_1 < t_2$ et essayer de faire la même chose que pour les suites définies implicitement).
4. En déduire que f admet des limites finies en 0^+ et en $+\infty$.
5. Déterminer $\lim_{t\to 0^+} f(t)$. (Attention, f n'est pas définie en 0 et a fortiori n'est pas continue en 0)
6. Déterminer $\lim_{t\to +\infty} f(t)$.
7. En déduire $\lim_{t\to +\infty} tf(t) = 1$. (Comment noter ce résultat avec le signe équivalent : $\sim$)
8. Justifier que f est la bijection réciproque de $g :]0, 1[\to]0, +\infty[\ x \mapsto \frac{1-x^5}{x}$
9. (a) Justifier que f est dérivale sur $]0, +\infty[$ et exprimer $f'(t)$ en fonction de $f(t)$ pour tout $t > 0$.
   (b) En déduire la limite de $f'(t)$ en 0 et calculer la limite de $t^2 f'(t)$ (Comment noter ce résultat avec le signe équivalent : $\sim$)

Exercice 2. On considère la suite de polynômes $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$T_0 = 1 \quad \text{et} \quad T_1 = X \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\, T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$$

1. (a) Calculer T_2, T_3 et T_4.
   (b) Calculer le degré et le coefficient de T_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (c) Calculer le coefficient constant de T_n.
2. (a) Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$.
   (b) En déduire que $\forall x \in [-1, 1]$, on a $T_n(x) = \cos(n \arccos(x))$.
3. (a) En utilisant la question 2a), déterminer les racines de T_n sur $[-1, 1]$.
   (b) Combien de racines distinctes a-t-on ainsi obtenues ? Que peut on en déduire ?
   (c) Donner la factorisaiton de T_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.