DM 13 VAR

Exercice 1. Pour toute variable aléatoire X telle que l'ensemble de ses valeurs images $X(\Omega)$ est un sous-ensemble fini de $\mathbb{N}$, on définit sa fonction génératrice par :

$$g_X : t \mapsto \mathrm{E}\left(t^X\right)$$

où E désigne l'espérance.
Soit X une telle variable aléatoire. On note $m \in \mathbb{N}$ sa valeur image maximale, ainsi $X(\Omega) \subset \{0, 1, 2, \dots, m\}$.

1. Justifier que g_X est une fonction polynomiale.
2. (a) Calculer $g_X(1)$.
   (b) Montrer que $g'_X(1) = \mathrm{E}(X)$.
   (c) Montrer que $g''_X(1) = \mathrm{E}(X(X-1))$.
   (d) Exprimer $\mathrm{V}(X)$ (où V désigne la variance) en fonction de $g'_X(1)$ et $g''_X(1)$.
3. (a) Exprimer g_{X+1} à l'aide de g_X.
   (b) Exprimer g_{2X} à l'aide de g_X.
4. Dans cette question, on suppose que $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$ où $(n,p) \in \mathbb{N} \times [0,1]$.
   (a) Calculer g_X.
   (b) Retrouver les valeurs de $\mathrm{E}(X)$ et $\mathrm{V}(X)$ à l'aide de la fonction génératrice.

Correction 1.

1. — On a d'après le théorème de transfert :

$$g_X : t \mapsto \mathrm{E}\left(t^X\right) = \sum_{k=0}^{m} t^k \mathrm{P}(X=k) = \sum_{k=0}^{m} a_k t^k$$

en posant $a_k = \mathrm{P}(X=k)$

$$\boxed{\text{Donc } g \text{ est bien une fonction polynomiale associée au polynôme } \sum_{k=0}^{m} a_k X^k \in \mathbb{R}[X].}$$

2. (a) Par définition de g_X, on a $g_X(1) = \mathrm{E}\left(1^X\right) = \mathrm{E}(1) = 1$.

$$\begin{aligned}
g_X(1) &= \mathrm{E}\left(1^X\right) \\
&= \sum_{k=0}^{m} 1^k \mathrm{P}(X=k) \\
&= \sum_{k=0}^{m} \mathrm{P}(X=k) \\
&= \mathrm{P}\left(\bigcup_{k=0}^{m} (X=k)\right) \\
&= \mathrm{P}\left(X \in \bigcup_{k=0}^{m} \{k\}\right) \\
&= \mathrm{P}(X \in \{0,1,2,\ldots,m\}) = 1
\end{aligned}$$

$$\boxed{g_X(1) = 1}$$

(b) La fonction génératrice g_X est dérivable sur $\mathbb{R}$ car c'est une fonction polynomiale d'après la question 1. On a d'après le théorème de transfert :

$$g_X : t \mapsto \mathrm{E}\left(t^X\right) = \sum_{k=0}^{m} t^k \mathrm{P}(X=k)$$

donc : $g'_X : t \mapsto \sum_{k=0}^{m} k t^{k-1} \mathrm{P}(X=k)$ et en particulier :

$$g'_X(1) = \sum_{k=0}^{m} k 1^{k-1} \mathrm{P}(X=k) = \sum_{k=0}^{m} k \mathrm{P}(X=k) = \mathrm{E}(X)$$

$$\boxed{g'_X(1) = \mathrm{E}(X)}$$

(c) La fonction génératrice est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ pour les mêmes raisons que celles exposées à la question précédente, et on a :

$$g''_X : t \mapsto \sum_{k=0}^{m} k(k-1) t^{k-2} \mathrm{P}(X=k)$$

donc en particulier :

$$g''_X(1) = \sum_{k=0}^{m} k(k-1) 1^{k-2} \mathrm{P}(X=k) = \sum_{k=0}^{m} k(k-1) \mathrm{P}(X=k) = \mathrm{E}(X(X-1))$$

d'après le théorème de transfert.

$$\boxed{g''_X(1) = \mathrm{E}(X(X-1))}$$

(d) On a d'après la formule de Koenig-Huygens :

$$\mathrm{V}(X) = \mathrm{E}\left((X - \mathrm{E}(X))^2\right) = \mathrm{E}\left(X^2\right) - \mathrm{E}(X)^2$$

Or on a par linéarité de l'espérance :

$$\mathrm{E}(X(X-1)) = \mathrm{E}\left(X^2 - X\right) = \mathrm{E}\left(X^2\right) - \mathrm{E}(X)$$

On peut également justifier cette égalité en détaillant les calculs à l'aide du théorème de transfert et la linéarité de la somme. D'où en utilisant les résultats des questions précédentes :

$$\begin{aligned}\mathrm{V}(X) &= \mathrm{E}\left(X^2\right) - \mathrm{E}(X)^2 \\ &= \mathrm{E}\left(X^2\right) - \mathrm{E}(X) + \mathrm{E}(X) - \mathrm{E}(X)^2 \\ &= \mathrm{E}(X(X-1)) + \mathrm{E}(X)(1 - \mathrm{E}(X)) \\ &= g''_X(1) + g'_X(1)\left(1 - g'_X(1)\right).\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathrm{V}(X) = g''_X(1) + g'_X(1)\,(1 - g'_X(1))\,.}$$

3. (a) $g_{X+1} : t \mapsto \mathrm{E}\left(t^{X+1}\right) = \mathrm{E}\left(t^X \times t\right) = \mathrm{E}\left(t^X\right) \times t = t g_X(t)$ par linéarité de l'espérance.

$$\boxed{g_{X+1}(t) = t g_X(t)}$$

(b) Par définition de la fonction génatrice, on a :

$$g_{2X} : t \mapsto \mathrm{E}\left(t^{2X}\right) = \mathrm{E}\left(\left(t^2\right)^X\right) = g_X\left(t^2\right)$$

$$\boxed{g_{2X}(t) = g_X\left(t^2\right)}$$

4. (a)

$$X(\Omega) = \{0, 1, 2, \ldots, n\} \quad \text{et} \quad \forall k \in X(\Omega), P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

On en déduit d'après le théorème de transfert que :

$$\begin{aligned}g_X(t) &= \mathrm{E}\left(t^X\right) \\ &= \sum_{k=0}^{n} t^k \mathrm{P}(X = k) \\ &= \sum_{k=0}^{n} t^k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (pt)^k (1-p)^{n-k}\end{aligned}$$

Puis, en utilisant la formule du binôme de Newton :

$$\boxed{g_X(t) = (pt+1-p)^n}$$

(b) On a d'après le résultat de la question précédente :

$$g_X' : t \mapsto np(pt+1-p)^{n-1} \text{ et } g_X'' : t \mapsto n(n-1)p^2(pt+1-p)^{n-2}.$$

On en déduit d'après les résultat de la question 2 que :

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(X) &= g_X'(1) = np(p+1-p)^{n-1} = np(1)^{n-1} = np \\ \mathrm{V}(X) &= g_X''(1) + g_X'(1)\left(1 - g_X'(1)\right) = n(n-1)p^2(p+1-p)^{n-2} + np(1-np) \\ &= np\left((n-1)p(1)^{n-2} + (1-np)\right) = np(np-p+1-np) = np(1-p). \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On retrouve bien l'espérance et la variance de la loi binomiale.}}$$

Cette méthode efficace peut bien sûr être utilisée pour calculer les moments d'autres lois de probabilité finies.