DM 14

Exercice 1. On considère trois points distincts du plan nommés A, B et C. Nous allons étudier le déplacement aléatoire d'un pion se déplaçant sur ces trois points. A l'étape $n=0$, on suppose que le pion se trouve sur le point A. Ensuite, le mouvement aléatoire du pion respecte les deux règles suivantes :

— le mouvement du pion de l'étape n à l'étape $n+1$ ne dépend que de la position du pion à l'étape n ;

— pour passer de l'étape n à l'étape $n+1$, on suppose que le pion a une chance sur deux de rester sur place, sinon il se déplace de manière équiprobable vers l'un des deux autres points.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note A_n l'évènement "le pion se trouve en A à l'étape n ", B_n l'évènement "le pion se trouve en B à l'étape n " et C_n l'évènement "le pion se trouve en C à l'étape n ". On note également, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n = P(A_n), b_n = P(B_n), c_n = P(C_n) \text{ et } V_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$$

1. Calculer les nombres a_n, b_n et c_n pour $n = 0, 1$.
2. Pour $n \in \mathbb{N}$, exprimer a_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n. Faire de même pour b_{n+1} et c_{n+1}.
3. Donner une matrice M telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $V_{n+1} = MV_n$.
4. On admet que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$M^n = \frac{1}{3 \cdot 4^n} \begin{pmatrix} 4^n+2 & 4^n-1 & 4^n-1 \\ 4^n-1 & 4^n+2 & 4^n-1 \\ 4^n-1 & 4^n-1 & 4^n+2 \end{pmatrix}$$

   En déduire une expression de a_n, b_n et c_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
5. Déterminer les limites respectives des suites $(a_n), (b_n)$ et (c_n). Interpréter le résultat.

Correction 1.

1. Puisqu'en $n=0$ le pion est en A, on a $a_0 = 1, b_0 = 0$ et $c_0 = 0$. A l'étape $n=1$, d'après les informations de l'énoncé, $a_1 = 1/2, b_1 = c_1$. Puisque $a_1 + b_1 + c_1 = 1$, on a $b_1 = c_1 = 1/4$.
2. Les événements A_n, B_n et C_n forment un système complet d'événements. D'après la formule des probabilités totales,

$$P(A_{n+1}) = P_{A_n}(A_{n+1}) P(A_n) + P_{B_n}(A_{n+1}) P(B_n) + P_{C_n}(A_{n+1}) P(C_n).$$

   Comme à la question précédente, on a $P_{A_n}(A_{n+1}) = 1/2, P_{B_n}(A_{n+1}) = 1/4$ et $P_{C_n}(A_{n+1}) = 1/4$. On en déduit que

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{4}b_n + \frac{1}{4}c_n$$

   En raisonnant de la même façon, ou par symétrie,

$$b_{n+1} = \frac{1}{4}a_n + \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{4}c_n$$
$$c_{n+1} = \frac{1}{4}a_n + \frac{1}{4}b_n + \frac{1}{2}c_n$$

3. D'après la question précédente, la matrice

$$M = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

   convient.

4. On a $V^n = M^n V_0$, ce qui donne
$$\begin{cases} a_n = \frac{4^n-2}{3\cdot 4^n} \\ b_n = \frac{4^n+1}{3\cdot 4^n} \\ c_n = \frac{4^n+1}{3\cdot 4^n} \end{cases}$$
On remarque qu'on a bien $a_n + b_n + c_n = 1$.
5. En factorisant par 4^n au numérateur et au dénominateur on obtient
$$a_n = \frac{1 - \frac{2}{4^n}}{3}$$
Or $\lim_{n\to+\infty} 4^n = +\infty$ donc
$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \frac{1}{3}$$
Un raisonnement équivalent donne
$$\lim_{n\to+\infty} b_n = \lim_{n\to+\infty} c_n = \frac{1}{3}$$
Ainsi au bout d'un certain temps il est équiprobable de se trouver sur A B ou C.

Exercice 2. Fonctions k-contractantes.
On suppose que f est une fonction définie sur $[0, 1]$ à valeurs dans $[0, 1]$ et qu'il existe $k \in]0, 1[$ tel que
$$\forall (x, y) \in [0, 1]^2,\ |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|.$$
Une telle fonction s'appelle une fonction k-contractante.

1. Montrer que f est continue.
2. En déduire que f admet au moins un point fixe dans $[0, 1]$.
3. Montrer par l'absurde que ce point fixe est unique. On le note c.
4. On considère alors une suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par son premier terme $c_0 \in [0, 1]$ et par la relation de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N},\ c_{n+1} = f(c_n)$.
   (a) Montrer que la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.
   (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|c_n - c| \leq k^n |c_0 - c|$.
   (c) En déduire la limite de la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Correction 2.

1. • On cherche à étudier la continuité de f sur $[0, 1]$. On repasse pour cela par la définition de la continuité en montrant que pour tout $x_0 \in [0, 1]$, f est continue en x_0. Pour cela il faut donc montrer que pour tout $x_0 \in [0, 1]$: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.
   Soit donc $x_0 \in [0, 1]$ fixé. On cherche donc à montrer que $f(x) - f(x_0)$ tend vers 0 lorsque x tend vers x_0. Mais par définition d'une fonction k-contractante, on sait que :
   $$\forall x \in [0, 1],\ |f(x) - f(x_0)| \leq k|x - x_0|.$$
   On va donc obtenir le résultat voulu en utilisant le corollaire du théorème des gendarmes. En effet, on a :
   ⋆ $\lim\limits_{x\to x_0} k|x - x_0| = 0$ par propriété sur les somme, composée et produit de limites.
   ⋆ $\forall x \in [0, 1]$, $|f(x) - f(x_0)| \leq k|x - x_0|$.
   Ainsi d'après le corollaire du théorème des gendarmes, on a : $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) - f(x_0) = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$. Ainsi on a montré que la fonction f est continue en x_0 et comme cela est vraie pour tout $x_0 \in [0, 1]$, on a la continuité de f sur $[0, 1]$.

2. Vérifions que f admet un unique point fixe dans $[0, 1]$.

   ⋆ La fonction f vérifie bien : $f : [0, 1] \to [0, 1]$ et on vient de montrer qu'elle est continue sur $[0, 1]$. Ainsi elle vérifie les hypothèses de la première question et ainsi on a bien l'existence d'un point fixe dans $[0, 1]$.

   ⋆ Comme il est impossible d'avoir une hypothèse de croissance ou de décroissance pour f, on ne va pas pouvoir appliquer le théorème de la bijection. Ainsi, pour obtenir l'unicité du point fixe, on suppose par l'absurde qu'il existe deux points fixes $(c, d) \in [0, 1]^2$ de f différents. Ainsi, on a : $|f(c) - f(d)| \leq k|c - d| \Leftrightarrow |c - d| \leq k|c - d|$. Or $0 < k < 1$ et ainsi, on a : $|c - d| < |c - d|$: absurde. Ainsi $c = d$ et f admet bien un unique point fixe.

3. (a)
   - On montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété $\mathcal{P}(n)$: c_n est bien définie et $c_n \in [0, 1]$.
   - Initialisation : pour $n = 0$: par définition de la suite, on sait que c_0 existe bien et que $c_0 \in [0, 1]$. Ainsi $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
   - Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ fixé, on suppose la propriété vraie au rang n, montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. Par hypothèse de récurrence, on sait donc que c_n existe et que $c_n \in [0, 1]$.
     ⋆ Comme $\mathcal{D}_f = [0, 1]$ et que $c_n \in [0, 1]$, on a : $c_n \in \mathcal{D}_f$. Ainsi $f(c_n)$ existe bien à savoir c_{n+1}.
     ⋆ De plus, comme on sait que $f : [0, 1] \to [0, 1]$ et que $c_n \in [0, 1]$, on obtient alors que : $f(c_n) \in [0, 1]$, à savoir $c_{n+1} \in [0, 1]$.

     Ainsi $\mathcal{P}(n + 1)$ est vraie.
   - Conclusion : il résulte du principe de récurrence que $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ existe bien et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $c_n \in [0, 1]$.

   (b)
   - On montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété $\mathcal{P}(n)$: $|c_n - c| \leq k^n|c_0 - c|$.
   - Initialisation : pour $n = 0$: d'un côté, on a : $|c_0 - c|$ et de l'autre côté, on a : $k^0|c_0 - c| = |c_0 - c|$. Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
   - Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ fixé, on suppose la propriété vraie au rang n, montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. D'après la définition de la fonction f, on sait que : $|f(c_n) - f(c)| \leq k|c_n - c| \Leftrightarrow |c_{n+1} - c| \leq k|c_n - c|$ car c est le point fixe de f. Puis par hypothèse de récurrence, on sait aussi que $|c_n - c| \leq k^n|c_0 - c|$. Ainsi comme $k > 0$, on a : $k|c_n - c| \leq k^{n+1}|c_0 - c|$. Puis : $|c_{n+1} - c| \leq k^{n+1}|c_0 - c|$. Donc $\mathcal{P}(n + 1)$ est vraie.
   - Conclusion : il résulte du principe de récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $|c_n - c| \leq k^n|c_0 - c|$.

   (c) On peut alors utiliser le corollaire du théorème des gendarmes et on obtient que :
   - $\forall n \in \mathbb{N},\ |c_n - c| \leq k^n|c_0 - c|$.
   - $\lim\limits_{n\to+\infty} k^n|c_0 - c| = 0$ car $-1 < k < 1$.

   Ainsi d'après le corollaire du théorème des gendarmes, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n = c$.