

DM 14

Exercice 1. On considère trois points distincts du plan nommés A, B et C . Nous allons étudier le déplacement aléatoire d'un pion se déplaçant sur ces trois points. A l'étape $n = 0$, on suppose que le pion se trouve sur le point A . Ensuite, le mouvement aléatoire du pion respecte les deux règles suivantes :

- le mouvement du pion de l'étape n à l'étape $n + 1$ ne dépend que de la position du pion à l'étape n ;
- pour passer de l'étape n à l'étape $n + 1$, on suppose que le pion a une chance sur deux de rester sur place, sinon il se déplace de manière équiprobable vers l'un des deux autres points.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note A_n l'évènement "le pion se trouve en A à l'étape n ", B_n l'évènement "le pion se trouve en B à l'étape n " et C_n l'évènement "le pion se trouve en C à l'étape n ". On note également, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n = P(A_n), b_n = P(B_n), c_n = P(C_n) \text{ et } V_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$$

1. Calculer les nombres a_n, b_n et c_n pour $n = 0, 1$.
2. Pour $n \in \mathbb{N}$, exprimer a_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n . Faire de même pour b_{n+1} et c_{n+1} .
3. Donner une matrice M telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $V_{n+1} = MV_n$.
4. On admet que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$M^n = \frac{1}{3 \cdot 4^n} \begin{pmatrix} 4^n + 2 & 4^n - 1 & 4^n - 1 \\ 4^n - 1 & 4^n + 2 & 4^n - 1 \\ 4^n - 1 & 4^n - 1 & 4^n + 2 \end{pmatrix}$$

En déduire une expression de a_n, b_n et c_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

5. Déterminer les limites respectives des suites $(a_n), (b_n)$ et (c_n) . Interpréter le résultat.

Exercice 2. Fonctions k -contractantes.

On suppose que f est une fonction définie sur $[0, 1]$ à valeurs dans $[0, 1]$ et qu'il existe $k \in]0, 1[$ tel que

$$\forall (x, y) \in [0, 1]^2, |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|.$$

Une telle fonction s'appelle une fonction k -contractante.

1. Montrer que f est continue.
2. En déduire que f admet au moins un point fixe dans $[0, 1]$.
3. Montrer par l'absurde que ce point fixe est unique. On le note c .
4. On considère alors une suite $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par son premier terme $c_0 \in [0, 1]$ et par la relation de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, c_{n+1} = f(c_n)$.
 - (a) Montrer que la suite $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie.
 - (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, |c_n - c| \leq k^n |c_0 - c|$.
 - (c) En déduire la limite de la suite $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$.