DM 16

Exercice 1 (d'après Agro 2016)**.** Soient u et v deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$. Le produit scalaire de u et v est notée $u \cdot v$, on note $u^2 = u \cdot u$ et l'on a $u^2 = \|u\|^2$.

Si E désigne un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, on note

$$E^\perp = \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, \forall y \in E, \langle x, y\rangle = 0\}.$$

$E^\perp$ s'appelle le sous-espace orthogonal à E, il est formé de tous les vecteurs qui sont orthogonaux à E.

0. Soit E un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. Montrer que $E^\perp$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

Dans $\mathbb{R}^3$ on considère les vecteurs $u = (1, 2, 3)$ et $v = (-3, 1, 5)$.

1. Déterminer la dimension du sous-espace vectoriel E de $\mathbb{R}^3$ engendré par la famille (u, v).
2. Déterminer le nombre réel λ tel que le vecteur $v' = u + \lambda v$ soit orthogonal à u.
3. Pour tout vecteur w de $\mathbb{R}^3$, on définit le vecteur w' par $w' = w - \frac{(w \cdot u)}{\|u\|^2}u - \frac{(w \cdot v')}{\|v'\|^2}v'$.
   (a) Montrer que pour tout vecteur w, on a $w' \in E^\perp$. Dans la suite, on suppose que $w = (-2, 3, 2)$.
   (b) Montrer que $w \notin E$ et $w \notin E^\perp$.
   (c) Déterminer le vecteur w' associé à w.
   (d) Montrer que la famille (u, v', w') est une base de $\mathbb{R}^3$.

Correction 1.

1. Les deux vecteurs u et v ne sont pas proportionnels, la famille (u, v) est donc une famille libre. Ainsi (u, v) est une base de $Vect(u, v)$

$$\boxed{Vect(u, v) \text{ est donc de dimension } 2.}$$

2. On chercher $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$\langle u + \lambda v, u\rangle = 0 \quad (E)$$

Le vecteur $u + \lambda v$ a pour coordonnées : $(1 - 3\lambda, 2 + \lambda, 3 + 5\lambda)$ donc

$$(E) \iff (1 - 3\lambda) \times 1 + (2 + \lambda) \times 2 + (3 + 5\lambda)3 = 0$$

Ce qui donne

$$(-3 + 2 + 15)\lambda + (1 + 4 + 9) = 0$$

D'où

$$\boxed{\lambda = -1}$$

3. (a) Montrons que w' comme défini dans l'énoncé appartient à $E^\perp$ c'est à dire que pour tout vecteur y de E, $\langle w', y\rangle = 0$. Calculons tout d'abord $\langle w', u\rangle$ et $\langle w', v'\rangle$.
On a

$$\begin{aligned}\langle w', u\rangle &= \langle w - \frac{(w \cdot u)}{\|u\|^2}u - \frac{(w \cdot v')}{\|v'\|^2}v', u\rangle \\ &= \langle w, u\rangle - \frac{(w \cdot u)}{\|u\|^2}\langle u, u\rangle - \frac{(w \cdot v')}{\|v'\|^2}\langle v', u\rangle\end{aligned}$$

par linéarité du produit scalaire

Or $\langle v', u\rangle = 0$ d'après la définition de λ dans la question précédente et $\langle u, u\rangle = \|u\|^2$ par définition de la norme.
Donc

$$\begin{aligned}\langle w', u\rangle &= \langle w, u\rangle - \langle w \cdot u\rangle \\ &= 0\end{aligned}$$

De manière identique on trouve On a

$$\begin{aligned}\langle w', v'\rangle &= \langle w - \frac{(w \cdot u)}{\|u\|^2}u - \frac{(w \cdot v')}{\|v'\|^2}v', v'\rangle \\ &= \langle w, v'\rangle - \frac{(w \cdot u)}{\|u\|^2}\langle u, v'\rangle - \frac{(w \cdot v')}{\|v'\|^2}\langle v', u'\rangle\end{aligned}$$

par linéarité du produit scalaire
Or $\langle u, v'\rangle = 0$ d'après la définition de λ dans la question précédente et $\langle v', v'\rangle = \|v'\|^2$ par définition de la norme.
Donc

$$\begin{aligned}\langle w', v'\rangle &= \langle w, v'\rangle - \langle w \cdot v'\rangle \\ &= 0\end{aligned}$$

Ainsi w' est orthogonal à u et v'. De plus v' est une combinaison linéaire de u et v et (u, v) est une base de E donc, (u, v') est est aussi une base de E. Ainsi pour tout $x \in E$ il existe $a, b \in /R^2$ tel que $x = au + bv'$ et donc :

$$\begin{aligned}\langle w', x\rangle &= \langle w', au + bv\rangle \\ &= a\langle w', u\rangle b\langle w', v\rangle \\ &= 0\end{aligned}$$

d'après les calculs effectués précédemment.

$$\boxed{\text{Pour tout } x \in E \text{ , } \langle w', x\rangle = 0, \text{ donc } w' \in E^\perp}$$

(b) Supposons par l'absurde que $w \in E$, dans ce cas il existe $a, b \in \mathbb{R}^2$ tel qu e $au + bv = w$. Les réels (a, b) sont donc solutions du systèmes :

$$\begin{cases} a - 3b &= -2 \\ 2a + b &= 3 \\ 3a + 5b &= 2 \end{cases}$$

On échelonne en faisant $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1$.

$$\begin{cases} a & -3b & = -2 \\ & 7b & = 7 \\ & 14b & = 8 \end{cases} \iff \begin{cases} a & -3b & = -2 \\ & b & = 1 \\ & 0 & = -6 \end{cases}$$

$$\boxed{\text{Le système n'admet pas de solution, donc } w \notin E.}$$

Montrons désormais que $w \notin E^\perp$. On a

$$\langle w, u\rangle = -2 + 6 + 6 = 10 \neq 0$$

Donc w n'est pas orthogonal à $u \in E$ donc

$$\boxed{w \notin E^{\perp}}$$

(c) D'après la question 2 on a $v' = (4, 1, -2)$. Calculons maintenant tous les termes dans la définition de w'.

$$\begin{aligned}
\langle w, u \rangle &= 10 \\
\|u\|^2 &= 1 + 4 + 9 = 14 \\
\langle w, v' \rangle &= -8 + 3 - 4 = -9 \\
\|v'\|^2 &= 16 + 1 + 4 = 21
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
w' &= w - \frac{10}{14}u - \frac{-9}{21}v' \\
&= (-2, 3, 2) - \frac{5}{7}(1, 2, 3) + \frac{3}{7}(4, 1, -2) \\
&= \frac{1}{7}(-14 - 5 + 12, 21 - 10 + 3, 14 - 15 - 6) \\
&= \frac{1}{7}(-7, 14, -7) \\
&= (-1, 2, -1)
\end{aligned}$$

$$\boxed{w' = (-1, 2, 1)}$$

(d) Soit $a, b, c \in \mathbb{R}^3$ tel que $au + bv' + cw' = 0$ (de quel 0 parle-t-on ici ?) En prenant le produit scalaire avec u on obtient

$$\langle au + bv' + cw', u \rangle = 0$$

(et de quel 0 parle-t-on là ?)
Donc par linéarité du produit scalaire :

$$a\langle u, u \rangle + b\langle v', u \rangle + c\langle w', u \rangle = 0$$

Or $\langle v', u \rangle = \langle w', u \rangle = 0$ Donc

$$a\|u\|^2 = 0$$

Comme u n'est pas le vecteur nul, $\|u\|^2 \neq 0$ donc $a = 0$
On a donc $bv' + cw' = 0$ (de quel 0 parle-t-on ici ?) En prenant le produit scalaire avec v' on obtient

$$\langle bv' + cw', v' \rangle = 0$$

(et de quel 0 parle-t-on là ?)
Donc par linéarité du produit scalaire :

$$b\langle v', v' \rangle + c\langle w', v' \rangle = 0$$

Or $\langle w', v' \rangle = 0$ Donc

$$b\|v'\|^2 = 0$$

Comme v' n'est pas le vecteur nul, $\|v'\|^2 \neq 0$ donc $b = 0$
On a donc $cw' = 0$ Comme v' n'est pas le vecteur nul, $c = 0$
Ainsi la famille (u, v', w') est libre. De plus comme elle est de cardinal 3 dans un espace de dimension 3 ($\mathbb{R}^3$) on conclut que

$$\boxed{(u, v', w') \text{ est une base de } \mathbb{R}^3}$$

Problème 1. Le but de ce problème est d'étudier la fonction définie par :

$$g : x \mapsto \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln(t)}.$$

1. Etude globale :
   (a) Justifier que g est bien définie sur $\mathcal{D}_g =]0,1[\cup]1,+\infty[$.
   (b) Montrer que g est positive sur $\mathcal{D}_g$.
   (c) Soit F une primitive (qu'on ne cherchera pas à calculer) de $t \mapsto \frac{1}{\ln(t)}$ sur $]0,1[$. Exprimer g à l'aide de F pour tout $x \in]0,1[$.
   (d) En déduire que g est dérivable sur $\mathcal{D}_g$ et montrer que pour tout $x \in]0,1[$:
   $$g'(x) = \frac{x-1}{\ln(x)}$$
   (C'est LA question à faire)
   (e) Par un raisonnement identique montrer que g est dérivable sur D_g.
   (f) Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathcal{D}_g$.
   (g) Etudier les variations de g sur $\mathcal{D}_g$. (les limites aux bornes ne sont pas demandées pour cette question)
2. Etude au voisinage de 0
   (a) Montrer que :
   $$\forall x \in]0,1[\quad \frac{x(x-1)}{2\ln(x)} \leq g(x) \leq \frac{x(x-1)}{\ln(x)}$$
   On fera très attention aux signes dans les inégalités.
   (b) En déduire que g se prolonge par continuité en 0 et préciser la valeur de ce prolongement. Par la suite, on note encore g la fonction continue, prolongée en 0
   (c) Montrer que g est dérivable à droite en 0 et préciser $g'(0)$.
3. Etude au voisinage de 1.
   (a) Calculer la limite $\lim_{t\to 1} \frac{1}{\ln(t)} - \frac{1}{t-1}$
   (b) En déduire qu'il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $t \in [1-\eta, 1+\eta] \setminus \{1\}$:
   $$\left| \frac{1}{\ln(t)} - \frac{1}{t-1} \right| \leq 1$$
   (c) Conclure que g est prolongeable par continuité en 1.

Correction 2.

1. Etude globale
   (a) On note f la fonction définie par $f(x) = \frac{1}{\ln(x)}$. Cette fonction est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $\ln(x)$ soit défini, c'est-à-dire $x > 0$ et tel que $\ln(x) \neq 0$, c'est-à-dire $x \neq 1$. On a donc $D_f =]0,1[\cup]1,+\infty[$.
   La fonction f est continue sur son ensemble de définition comme quotient de fonction usuelle, elle admet donc une primitive sur $]0,1[$ et sur $]1,+\infty[$. [1]
   Notons F_1 une primitive sur $]0,1[$. Pour tout $x \in]0,1[$, on a $x^2 \in]0,1[$ et ainsi
   $$g(x) = F_1(x^2) - F_1(x)$$
   est bien définie sur $]0,1[$.
   De la même façon, en notant F_2 une primitive sur $]1,+\infty[$. Pour tout $x \in]1,\infty[$, on a $x^2 \in]1,\infty[$ et ainsi
   $$g(x) = F_2(x^2) - F_2(x)$$
   est bien définie sur $]1,\infty[$.
   Finalement

1. Il faut faire attention ici que l'intervalle définie par les bornes de l'intégrale ne contiennent pas des points où f n'est pas définie.

$$\boxed{D_g =]0,1[\cup]1,+\infty[}$$

(b) Nous reprenons les notations de la question 1. Pour tout $x \in]0,1[$, $x^2 < x$ ainsi $g(x) = -\int_{x^2}^{x} f(t)dt$, où les bornes d'intégration sont ordonnées dans le sens croissant. Maintenant pour $x \in]0,1[$, $[x^2, x] \subset]0,1[$ or pour $t \in]0,1[$, $f(t) < 0$.

$$\boxed{\text{Ainsi } g(x) > 0 \text{ sur }]0,1[.}$$

Pour $x > 1$, on a $x^2 > x$ et les bornes sont déjà bien ordonées. De plus $\frac{1}{\ln(t)} > 0$ pour tout $t > 1$ et

$$\boxed{\text{On a bien } g(x) > 0 \text{ sur }]1,+\infty[.}$$

(c) Cf question 1 : $g(x) = F(x^2) - F(x)$

(d) Nous reprenons les notations de la question 1. Par définition on a $g(x) = F_1(x^2) - F_1(x)$ pour $0 < x < 1$ et $g(x) = F_2(x^2) - F_2(x)$ pour $x > 1$. Or par définition d'une primitive les fonctions F_1, F_2 sont dérivables sur leur ensemble de définition. Donc g est dérivable en tant que composée et somme de fonctions dérivables.

On a pour tout $x < 1$: $g'(x) = 2xF_1'(x^2) - F_1'(x)$. Or $F_1'(x) = f(x)$ et donc $g'(x) = \frac{2x}{\ln(x^2)} - \frac{1}{\ln(x)}$, en simplifiant et factorisant on obtient :

$$\boxed{g'(x) = \frac{x-1}{\ln(x)}}$$

(e) Les calculs sont identiques sur $]1,+\infty[$.

(f) La fonction g' est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathcal{D}_g$ comme quotient de fonction $\mathcal{C}^\infty$.

$$\boxed{\text{Ainisi } g \text{ est de classe } \mathcal{C}^\infty \text{ sur } \mathcal{D}_g.}$$

(g) On a vu que pour tout $x \in \mathcal{D}_g$ on a

$$g'(x) = \frac{x-1}{\ln(x)}$$

On obtient le tableau de signe/variations suivant :

x	0		1		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$	
$\ln(x)$		$-$	0	$+$	
$g'(x)$		$+$	$\Vert$	$+$	
$g(x)$		$\nearrow$		$\nearrow$	

2. Etude au voisinage de 0.

(a) Soit $x \in]0,1[$, alors comme on l'a vu précédemment $g(x) = -\int_{x^2}^{x} f(t)dt$ où les bornes de l'intégrales sont bien ordonnées. Par ailleurs pour tout $t \in [x^2, x]$ on a $\ln(x^2) \leq \ln(t) \leq \ln(x) < 0$ par croissance du logarithme. Et donc

$$\frac{1}{\ln(x)} \leq \frac{1}{\ln(t)} \leq \frac{1}{\ln(x^2)}$$

par décroissance de la fonction $x \to \frac{1}{x}$ sur R_-^*

Par croissance de l'intégrale on obtient alors :

$$\int_{x^2}^{x} \frac{1}{\ln(x)} dt \leq \int_{x^2}^{x} \frac{1}{\ln(t)} dt \leq \int_{x^2}^{x} \frac{1}{\ln(x^2)} dt$$

Remarquons que le membre le plus à gauche et le plus à droite sont des fonctions constantes vis-à-vis de t. Ainsi leur intégrale se calcule immédiatement, on obtient

$$(x - x^2)\frac{1}{\ln(x)} \leq \int_{x^2}^{x} \frac{1}{\ln(t)} dt \leq (x - x^2)\frac{1}{\ln(x^2)}$$

Le terme du milieu correspond à $-g(x)$ et on a donc après multiplication par -1 qui inverse le sens des inégalités ont obtient :

$$(x^2 - x)\frac{1}{\ln(x^2)} \leq g(x) \leq (x^2 - x)\frac{1}{\ln(x)}$$

c'est-à-dire en factorisant :

$$\boxed{\tfrac{x(x-1)}{2\ln(x)} \leq g(x) \leq \tfrac{x(x-1)}{\ln(x)}}$$

(b) Par calcul usuel sur les limites : $\lim_{x\to 0} \frac{x}{\ln(x)} = 0$ ainsi

$$\lim_{x\to 0} \frac{x(x-1)}{2\ln(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x(x-1)}{\ln(x)} = 0$$

Le théorème des gendarmes assure que g admet une limite en 0 et

$$\lim_{x\to 0} g(x) = 0$$

$$\boxed{g \text{ est donc prolongeable par continuité en posant } g(0) = 0}$$

(c) On calcule le taux d'accroissement en 0 : $\tau_{g,x} = \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \frac{g(x)}{x}$ Ainsi pour tout $x \in]0, 1[$:

$$\frac{x-1}{2\ln(x)} \leq \tau_{g,x} \leq \frac{x-1}{\ln(x)}$$

Comme $\lim_{x\to 0} \frac{1}{\ln(x)} = 0$, de nouveau d'après le théorème des gendarmes on a : $\lim_{x\to 0} \tau_{g,x} = 0$.

$$\boxed{\text{Ainsi } g \text{ est dérivable en 0 et on a } g'(0) = 0.}$$

3. Au voisinage de 1.

(a) Faisons le changement de variable $T = t - 1$ et posons

$$a(T) = \frac{1}{\ln(T+1)} - \frac{1}{T}$$

Remarquons que l'on a alors

$$\lim_{t\to 1} \frac{1}{\ln(t)} - \frac{1}{t-1} = \lim_{T\to 0} a(T)$$

Il suffit donc de trouver la limite de a en 0, on a

$$a(T) = \frac{T - \ln(1+T)}{T\ln(1+T)}$$

Soit grâce au développement limité de $\ln(1+T)$ en 0 :

$$\begin{aligned} a(T) &= \frac{T - T + T^2/2 + o(T^2)}{T^2 + o(T^2)} \\ &= \frac{1}{2} + o(1) \end{aligned}$$

$$\boxed{\lim_{t\to 1} \frac{1}{\ln(t)} - \frac{1}{t-1} = \frac{1}{2}}$$

(b) Notons $b(t) = \frac{1}{\ln(t)} - \frac{1}{t-1}$ Par définition de la limite, pour tout $\epsilon > 0$ il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $t \in [1-\eta, 1+\eta]$: $|b(t) - \frac{1}{2}| \leq \epsilon$, soit

$$-\epsilon + \frac{1}{2} \leq b(t) \leq \epsilon + \frac{1}{2}$$

Prenons $\epsilon = 1/2$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $t \in [1-\eta, 1+\eta]$

$$0 \leq b(t) \leq 1$$

En particulier $|b(t)| \leq 1$ (et a fortiori $|b(t)| \leq 2$ dans le sujet original (faute de frappe))

$$\boxed{\text{Il existe } \eta > 0 \text{ tel que pour tout } t \in [1-\eta, 1+\eta] \setminus \{1\} : \left|\frac{1}{\ln(t)} - \frac{1}{t-1}\right| \leq 1}$$

(c) Regardons donc $u(x) = g(x) - \int_x^{x^2} \frac{1}{t-1} dt$ on obtient

$$\begin{aligned}
u(x) &= \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln(t)} - \frac{1}{t-1} dt \quad \text{par linéarité, d'où} \\
|u(x)| &= \left| \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln(t)} - \frac{1}{t-1} dt \right| \\
|u(x)| &\leq \int_{[x,x^2]} \left| \frac{1}{\ln(t)} - \frac{1}{t-1} \right| dt \quad \text{En utilisant l'inégalité triangulaire}
\end{aligned}$$

Remarquons ici que $\int_{[x,x^2]}$ signifie que l'on intégre sur $[x, x^2]$ ou $[x^2, x]$ selon l'ordre des bornes. On peut sinon faire une disjonction de cas, avec $x > 1$ ou $x < 1$.
On a donc pour $x, x^2 \in [1-\eta, 1+\eta]$

$$|u(x)| \leq \int_{[x,x^2]} 2dt = 2|x^2 - x|$$

Or quand $x \to 1$, on a bien $x, x^2 \in [1-\eta, 1+\eta]$ donc l'inégalité est vraie pour x suffisament proche de 1. Or $\lim_{x\to 1} |x^2 - x| = 0$ donc le théorème des gendarmes assure que

$$\lim_{x\to 1} |u(x)| = 0$$

Enfin

$$\int_x^{x^2} \frac{1}{t-1} dt = [\ln(t)]_x^{x^2} = \ln(x^2) - \ln(x) = \ln(2)$$

Ce qui donne avec la limite de $|u(x)|$, $\lim_{x\to 1} |g(x) - \ln(2)| = 0$ c'est-à-dire :

$$\lim_{x\to 1} g(x) = \ln(2)$$

$$\boxed{\text{Ainsi } g \text{ est prolongeable par continuité en 1 en posant } g(1) = \ln(2)}$$