DM 16

Exercice 1 (d'après Agro 2016)**.** Soient u et v deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$. Le produit scalaire de u et v est notée $u \cdot v$, on note $u^2 = u \cdot u$ et l'on a $u^2 = \|u\|^2$.

Si E désigne un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, on note

$$E^\perp = \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, \forall y \in E, \langle x, y\rangle = 0\}.$$

$E^\perp$ s'appelle le sous-espace orthogonal à E, il est formé de tous les vecteurs qui sont orthogonaux à E.

0. Soit E un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. Montrer que $E^\perp$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

Dans $\mathbb{R}^3$ on considère les vecteurs $u = (1, 2, 3)$ et $v = (-3, 1, 5)$.

1. Déterminer la dimension du sous-espace vectoriel E de $\mathbb{R}^3$ engendré par la famille (u, v).
2. Déterminer le nombre réel λ tel que le vecteur $v' = u + \lambda v$ soit orthogonal à u.
3. Pour tout vecteur w de $\mathbb{R}^3$, on définit le vecteur w' par $w' = w - \frac{(w \cdot u)}{\|u\|^2}u - \frac{(w \cdot v')}{\|v'\|^2}v'$.
   (a) Montrer que pour tout vecteur w, on a $w' \in E^\perp$. Dans la suite, on suppose que $w = (-2, 3, 2)$.
   (b) Montrer que $w \notin E$ et $w \notin E^\perp$.
   (c) Déterminer le vecteur w' associé à w.
   (d) Montrer que la famille (u, v', w') est une base de $\mathbb{R}^3$.

Problème 1. Le but de ce problème est d'étudier la fonction définie par :

$$g : x \mapsto \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln(t)}.$$

1. Etude globale :
   (a) Justifier que g est bien définie sur $\mathcal{D}_g =]0, 1[\cup]1, +\infty[$.
   (b) Montrer que g est positive sur $\mathcal{D}_g$.
   (c) Soit F une primitive (qu'on ne cherchera pas à calculer) de $t \mapsto \frac{1}{\ln(t)}$ sur $]0, 1[$. Exprimer g à l'aide de F pour tout $x \in]0, 1[$.
   (d) En déduire que g est dérivable sur $\mathcal{D}_g$ et montrer que pour tout $x \in]0, 1[$:
   $$g'(x) = \frac{x-1}{\ln(x)}$$
   (C'est LA question à faire)
   (e) Par un raisonnement identique montrer que g est dérivable sur D_g.
   (f) Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathcal{D}_g$.
   (g) Etudier les variations de g sur $\mathcal{D}_g$. (les limites aux bornes ne sont pas demandées pour cette question)
2. Etude au voisinage de 0
   (a) Montrer que :
   $$\forall x \in]0, 1[\quad \frac{x(x-1)}{2\ln(x)} \leq g(x) \leq \frac{x(x-1)}{\ln(x)}$$
   On fera très attention aux signes dans les inégalités.
   (b) En déduire que g se prolonge par continuité en 0 et préciser la valeur de ce prolongement. Par la suite, on note encore g la fonction continue, prolongée en 0

(c) Montrer que g est dérivable à droite en 0 et préciser $g'(0)$.

3. Etude au voisinage de 1.

   (a) Calculer la limite $\lim_{t\to 1} \frac{1}{\ln(t)} - \frac{1}{t-1}$

   (b) En déduire qu'il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $t \in [1-\eta, 1+\eta] \setminus \{1\}$:

$$\left|\frac{1}{\ln(t)} - \frac{1}{t-1}\right| \leq 1$$

   (c) Conclure que g est prolongeable par continuité en 1.