Correction : DM 17

Exercice 1 (D'après G2E 2014)**.** Une compagnie aérienne dispose d'une flotte constituée de deux types d'avions : des trimoteurs (un moteur situé en queue d'avion et un moteur sous chaque aile) et des quadrimoteurs (deux moteurs sous chaque aile).

Tous les moteurs de ces avions sont susceptibles, durant chaque vol, de tomber en panne avec la même probabilité $x \in]0,1[$ et indépendamment les uns des autres. Toutefois, les trimoteurs peuvent achever leur vol si le moteur situé en queue ou les deux moteurs d'ailes sont en état de marche et les quadrimoteurs le peuvent si au moins deux moteurs situés sous deux ailes distinctes sont en état de marche.

1. On note X_3 (respectivement X_4) la variable alétoire correponsdant au nombre de moteurs en panne sur un trimoteur (respectivement un quadirmoteur) durant un vol.
   (a) Quelles sont les lois suivies par X_3 et X_4 ?
   (b) Calculer la probabilité que strictement moins de la moitié des moteurs du trimoteur tombent en panne. Même question pour le quadrimoteur.
2. (a) On note T l'événement « le trimoteur achève son vol ». Démontrer que :

$$P(T) = (1-x)(-x^2+x+1)$$

   (b) On note Q l'événement « le quadrimoteur achève son vol ». Démontrer que :

$$P(Q) = (1-x)^2(1+x)^2$$

3. Déterminer , des quadrimoteurs ou des trimoteurs, quels sont les avions les plus sûrs.

Correction 1.

1. (a) X_3 (resp. X_4) suit une loi binomiale $\mathcal{B}(3,x)$ (resp. $\mathcal{B}(4,x)$)
   (b) L'événement que strictmeent moins de la moitié des moteurs du trimoteur tombent en pannes correspond à l'événement $[X_3 < \frac{3}{2}]$. Comme X_3 est à valeur entière cela correspond à $[X_3 \leq 1]$. Et on a

$$P(X_3 \leq 1) = P(X_3=0)+P(X_3=1) = (1-x)^3+\binom{3}{1}x(1-x)^2 = (1-x)^2(1-x+3x) = (1-x)^2(1+2x)$$

   On obtient le même type de calcul pour le quadrimoteur, on a $[X_4 < \frac{4}{2}] = [X_4 < 2] = [X_4 \leq 1]$ et donc

$$P(X_4 \leq 1) = P(X_4=0)+P(X_4=1) = (1-x)^4+\binom{4}{1}x(1-x)^3 = (1-x)^3(1-x+4x) = (1-x)^3(1+3x)$$

2. (a) Soit M_G (resp M_A resp. M_D) la variable aléatoire qui vaut 1 si le moteur de gauche (resp. le moteur arrière, reps. le moteur de droite) tombe en panne et 0 sinon. L'évènement T correspond à l'événément $[M_A=0] \cup ([M_G=0 \text{ et } M_D=0])$ On a donc

$$\begin{aligned}
P(T) &= P([M_A=0] \cup ([M_G=0 \text{ et } M_D=0])) \\
&= P([M_A=0]) + P(([M_G=0 \text{ et } M_D=0])) - P(M_A=0 \text{ et } M_G=0 \text{ et } M_D=0]) \\
&= (1-x) + (1-x)^2 - (1-x)^3 \\
&= (1-x)(1+(1-x)-(1-x)^2) \\
&= (1-x)(1+x-x^2)
\end{aligned}$$

3. (a) On fait la meme chose en considérant les 4 moteurs. Soit M_{G_1} (resp M_{G_2} resp. M_{D_1} resp. M_{D_2}) la variable aléatoire qui vaut 1 si le premier moteur de gauche (resp. le deuxième moteur de gauche , reps. le premier moteur de droite, resp. le deuxième motuer de droite) tombe en panne et 0 sinon. L'évènement $\overline{Q}$ correspond à l'événément $[M_{G_1} = 1$ et $M_{G_2} = 1] \cup [M_{D_1} = 1$ et $M_{D_2} = 1]$ On a donc

$$\begin{aligned}
P(Q) &= 1 - P(\overline{Q}) \\
&= 1 - P([M_{G_1} = M_{G_2} = 1] - P([M_{D_1} = M_{D_2} = 1]) + P([M_{D_1} = M_{D_2} = M_{G_1} = M_{G_2} = 1) \\
&= 1 - x^2 - x^2 + x^4 \\
&= 1 - 2x^2 + x^4 \\
&= (1 - x^2)^2 \\
&= ((1 - x)(1 + x))^2 \\
&= (1 - x)^2(1 + x)^2
\end{aligned}$$

4. On peut estimer que x est très proche de 0 (sinon il faut d'urgence arrêter de prendre l'avion) et regarder $P(T) - P(Q)$ quand x tends vers 0.
On a $P(T)-P(Q) = (1-x)(-x^2+x+1)-(1-2x^2+x^4) = x^3-x^4 = x^3+o(x^3)$. Ainsi proche de 0, $P(T) \geq P(Q)$. Les trimoteurs sont donc plus fiables. (Il n'était même pas nécessaire de faire l'approximation $x \sim 0$ en effet $x^3 - x^4 = x^3(1 - x)$ et comme $x \in [0, 1]$, on a bien $P(T) \geq P(Q)$. La preuve avec l'approximation $x \sim 0$ peut-etre intéressante par exemple en physique pour avoir une idée du comportement d'une expérience dans certain cas limite)