Correction DM2

Exercice 1. On cherche à résoudre l'équation (E) suivante, d'inconnue réelle x :

$$\lfloor\sqrt{x}\rfloor = \left\lfloor\frac{x}{2}\right\rfloor$$

1. Donner le domaine de définition de l'équation (E).
2. Ecrire un programme python qui demande à l'utilisateur un flottant x et qui renvoie True si le réel ets solution de l'équation (E) et False sinon.
3. Montrer que toute solution x de (E) est solution du système (S) suivant :

$$\begin{cases} \sqrt{x} & < & \frac{x}{2}+1 \\ \frac{x}{2}-1 & < & \sqrt{x} \end{cases}$$

4. Résoudre le système (S).
5. Soit $\alpha = 2(2+\sqrt{3})$ Calculer la partie entière de α.
6. Pour tout $k \in [\![0,7]\!]$ déterminer si les réels de l'intervalle $[k, k+1[$ sont solutions de (E).
7. Conclure.

Correction 1.

1. (E) est bien défini pour $x \geq 0$
2.
```
x=float(input('donnez une valeur de x' ))
if floor(sqrt(x))==floor(x/2):
        print(True)
else:
        print(false)
```

3. Rappelons l'inégalité vraie pour tout $y \in \mathbb{R}$:

$$y-1 < \lfloor y\rfloor \leq y < \lfloor y\rfloor + 1$$

Soit x une solution de (E) on a d'une part :

$$\lfloor\sqrt{x}\rfloor = \left\lfloor\frac{x}{2}\right\rfloor \leq \frac{x}{2}$$

et

$$\sqrt{x}-1 < \lfloor\sqrt{x}\rfloor$$

Donc

$$\boxed{\sqrt{x} < \frac{x}{2}+1}$$

D'autre part on a :

$$\left\lfloor\frac{x}{2}\right\rfloor = \lfloor\sqrt{x}\rfloor \leq \sqrt{x}$$

et

$$\frac{x}{2}-1 < \left\lfloor\frac{x}{2}\right\rfloor$$

donc

$$\boxed{\frac{x}{2}-1 < \sqrt{x}.}$$

4. — Résolvons la première inégalité : $\sqrt{x} < \frac{x}{2}+1$

- Cas 1 $\frac{x}{2}+1\geq 0$ c'est-à-dire $x\geq -2$. Rappelons que l'ensemble de définion de l'équation est $x\geq 0$, on se concentre donc sur les réels positifs.
  On peut alors mettre l'équation au carré qui devient
  $$x<\frac{x^2}{4}+x+1.$$
  D'où $x^2>-4$ ce qui est toujours vrai.
  $$\boxed{\text{Les solutions de cette première inéquation sont } x\geq 0}$$
- Cas 2 $\frac{x}{2}+1<0$. Ce cas ne se produit pas car $x\geq 0$ pour que l'équation soit bien définie.

— Résolvons la seconde inégalité : $\frac{x}{2}-1<\sqrt{x}$

- Cas 1 $\frac{x}{2}-1\geq 0$ c'est-à-dire $x\geq 2$.
  On peut alors mettre l'équation au carré qui devient
  $$\frac{x^2}{4}-x+1<x$$
  D'où l'on obtient $\frac{x^2}{4}-2x+1<0$. Le discrimant vaut $\Delta=4-1=3>0$ et on obtient 2 racines
  $$r_1=\frac{2+\sqrt{3}}{\frac{1}{2}}\quad \text{et}\quad r_2=\frac{2-\sqrt{3}}{\frac{1}{2}}$$
  soit en simplifiant
  $$r_1=2(2+\sqrt{3})\quad \text{et}\quad r_2=2(2-\sqrt{3}).$$
  Le polynôme est strictement négatif entre les racines c'est-à-dire sur $]2(2-\sqrt{3}),2(2+\sqrt{3})[$.
  On doit maintenant prendre l'intersection avec l'ensemble de définition : $x\geq 0$ et l'hypothèse $x\geq 2$ On obtient
  $$x\in[2,2(2+\sqrt{3})[$$
- Cas 2 $\frac{x}{2}-1<0$ c'est-à-dire $x<2$. Ici tous les réels sont solutions car la racine est toujours positive.
  On obtient donc $x\in[0,2[$
  En conclusion, les solutions de cette deuxième équation sont
  $$\boxed{[0,2(2+\sqrt{3})[}$$

Les solutions du système correspondent à l'intersection des deux enembles trouvés précédemment : c'est donc
$$\boxed{[0,2(2+\sqrt{3})[}$$

5. $1<3<4$ donc $1<\sqrt{3}<2$ et donc $3<2+\sqrt{3}<4$ et finalement $\alpha\in]6,8[$. Ainsi $\lfloor\alpha\rfloor$ vaut 6 ou 7. Vérifions que $\alpha>7$, pour cela regardons l'inégalité
$$\begin{array}{rrl} & 2(2+\sqrt{3}) & >7\\ \iff & (2+\sqrt{3}) & >\frac{7}{2}\\ \iff & \sqrt{3} & >\frac{3}{2}\\ \iff & 3 & >\frac{9}{4}\\ \iff & 12 & >9\end{array}$$
La dernière inégalité étant vraie, comme nous avons procédé par équivalence, on a bien $\alpha>7$. Ainsi
$$\boxed{\lfloor\alpha\rfloor=7}$$

6. — Cas $k=0$ Soit $x\in[0,1[$. On a alors $0\leq\sqrt{x}<1$ et donc $\lfloor x\rfloor=0$ et $0\leq\frac{x}{2}<\frac{1}{2}<1$ donc $\left\lfloor\frac{x}{2}\right\rfloor=0$. D'où

$$\boxed{\forall x \in [0,1[\quad \lfloor\sqrt{x}\rfloor = \lfloor\frac{x}{2}\rfloor}$$

— Cas $k=1$ Soit $x \in [1,2[$. On a alors $1 \leq \sqrt{x} < \sqrt{2} < 2$ et donc $\lfloor x \rfloor = 1$ et $0 \leq \frac{1}{2} \leq \frac{x}{2} < 1$ donc $\lfloor\frac{x}{2}\rfloor = 0$. D'où

$$\boxed{\forall x \in [1,2[\quad \lfloor\sqrt{x}\rfloor \neq \lfloor\frac{x}{2}\rfloor}$$

— Cas $k=2$ Soit $x \in [2,3[$. On a alors $1 \leq \sqrt{2} \leq \sqrt{x} < \sqrt{3} < 2$ et donc $\lfloor x \rfloor = 1$ et $1 \leq \frac{x}{2} < \frac{3}{2} < 2$ donc $\lfloor\frac{x}{2}\rfloor = 1$. D'où

$$\boxed{\forall x \in [2,3[\quad \lfloor\sqrt{x}\rfloor = \lfloor\frac{x}{2}\rfloor}$$

— Cas $k=3$
Soit $x \in [3,4[$. On a alors $1 \leq \sqrt{3} \leq \sqrt{x} < \sqrt{4} = 2$ et donc $\lfloor x \rfloor = 1$ et $1 \leq \frac{3}{2} \leq \frac{x}{2} < 2$ donc $\lfloor\frac{x}{2}\rfloor = 1$. D'où

$$\boxed{\forall x \in [3,4[\quad \lfloor\sqrt{x}\rfloor = \lfloor\frac{x}{2}\rfloor}$$

— Cas $k=4$ Soit $x \in [4,5[$. On a alors $2 \leq \sqrt{x} < \sqrt{5} < 3$ et donc $\lfloor x \rfloor = 2$ et $2 \leq \frac{x}{2} < \frac{5}{2} < 3$ donc $\lfloor\frac{x}{2}\rfloor = 2$. D'où

$$\boxed{\forall x \in [4,5[\quad \lfloor\sqrt{x}\rfloor = \lfloor\frac{x}{2}\rfloor}$$

— Cas $k=5$ Soit $x \in [5,6[$. On a alors $2 \leq \sqrt{x} < \sqrt{5} < 3$ et donc $\lfloor x \rfloor = 2$ et $2 \leq \frac{x}{2} < \frac{5}{2} < 3$ donc $\lfloor\frac{x}{2}\rfloor = 2$. D'où

$$\boxed{\forall x \in [5,6[\quad \lfloor\sqrt{x}\rfloor = \lfloor\frac{x}{2}\rfloor}$$

— Cas $k=6$ Soit $x \in [6,7[$. On a alors $2 \leq \sqrt{6} \leq \sqrt{x} < \sqrt{7} < 3$ et donc $\lfloor x \rfloor = 2$ et $3 \leq \frac{x}{2} < \frac{7}{2} < 4$ donc $\lfloor\frac{x}{2}\rfloor = 3$. D'où

$$\boxed{\forall x \in [6,7[\quad \lfloor\sqrt{x}\rfloor \neq \lfloor\frac{x}{2}\rfloor}$$

— Cas $k=7$ Soit $x \in [7,8[$. On a alors $2 \leq \sqrt{7} \leq \sqrt{x} < \sqrt{8} < 3$ et donc $\lfloor x \rfloor = 2$ et $3 \leq \frac{7}{2} \leq \frac{x}{2} < \frac{8}{2} = 4$ donc $\lfloor\frac{x}{2}\rfloor = 3$. D'où

$$\boxed{\forall x \in [7,8[\quad \lfloor\sqrt{x}\rfloor \neq \lfloor\frac{x}{2}\rfloor}$$

7. On a vu à la question 4 que si x était solution de $\lfloor x \rfloor = \lfloor\frac{x}{2}\rfloor$ alors $x \in [0,\alpha] \subset [0,8[$.
Réciproquement, la question précédente permet de voir que x est solution si $x \in [0,1[\cup[2,3[\cup[3,4[\cup[4,5[\cup[5,6[=$ $[0,1[\cup[2,6[$ et n'était pas solution pour $x \in [1,2[\cup[6,7[\cup[7,8[$.

$$\boxed{\mathcal{S} = [0,1[\cup[2,6[}$$

Exercice 2. On cherche les racines réelles du polynôme $P(x) = x^3 - 6x - 9$.

1. Donner en fonction du paramètre x réel, le nombre de solutions réelles de l'équation $x = y + \frac{2}{y}$ d'inconnue $y \in \mathbb{R}^*$.
2. Soit $x \in \mathbb{R}$ vérifiant $|x| \geq 2\sqrt{2}$. Montrer en posant le changement de variable $x = y + \frac{2}{y}$ que :
$$P(x) = 0 \iff y^6 - 9y^3 + 8 = 0$$
3. Résoudre l'équation $z^2 - 9z + 8 = 0$ d'inconnue $z \in \mathbb{R}$.
4. En déduire une racine du polynôme P.
5. Donner toutes les racines réelles du polynôme P.

Correction 2.

1. Résolvons l'équation proposée en fonction du paramètre x. On a

$$\begin{array}{rrl} & y+\frac{2}{y} & = x \\ \Longleftrightarrow & y^2+2 & = yx \\ \Longleftrightarrow & y^2-xy+2 & = 0 \end{array}$$

On calcule le discriminant de ce polynome de degré 2 on obtient

$$\Delta = x^2-8$$

Donc :
— si $x^2-8>0$ c'est-à-dire si $|x|>2\sqrt{2}$, l'équation admet 2 solutions.
— si $x^2-8=0$ c'est-à-dire si $x=2\sqrt{2}$ ou $x=-2\sqrt{2}$ l'équation admet 1 seule solution.
— si $x^2-8<0$ c'est-à-dire si $x\in]-2\sqrt{2},22\sqrt{2}[$ l'équation admet 0 solution.

2. Soit $x=y+\frac{2}{y}$, on a :

$$\begin{array}{rrl} & P(x) & = 0 \\ \Longleftrightarrow & \left(y+\frac{2}{y}\right)^3-6\left(y+\frac{2}{y}\right)-9 & = 0 \end{array}$$

Développons à part $\left(y+\frac{2}{y}\right)^3$. On obtient tout calcul fait

$$\left(y+\frac{2}{y}\right)^3 = y^3+6y+\frac{12}{y}+\frac{8}{y^3}$$

Donc

$$\begin{array}{rrl} & \left(y+\frac{2}{y}\right)^3-6\left(y+\frac{2}{y}\right)-9 & = 0 \\ \Longleftrightarrow & y^3+\frac{8}{y^3}-9 & = 0 \\ \Longleftrightarrow & y^6+8-9y^3 & = 0 \end{array}$$

où la dernière équivalence s'obtient en multipliant par y^3 non nul.

3. On résout $z^2-9z+8=0$ à l'aide du discriminant du polynôme z^2-9z+8 qui vaut $\delta=81-32=49=7^2$. On a donc deux solutions

$$\boxed{z_1=\frac{9+7}{2}=8 \quad \text{et} \quad z_2=\frac{9-7}{2}=1}$$

4. La question d'avant montre que $\sqrt[3]{1}=1$ est solution de l'équation $y^6-9y^3+8=0$ (on peut le vérifier à la main si on veut, mais c'était le but de la question précédente.)
Comme on a effectué le changement de variable $x=y+\frac{2}{y}$ et à l'aide de la question 2, on voit que $x=1+\frac{2}{1}=3$ est solution de l'équation $P(x)=0$ c'est-à-dire que

$$\boxed{3 \text{ est une racine de } P.}$$

(de nouveau on pourrait le revérifier en faisant le calcul, mais ceci n'est psa nécéssaire)

5. Comme 3 est racine de P, on peut écrire $P(x)$ sous la forme $(x-3)(ax^2+bx+c)$, avec $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$. En développant on obtient $P(x)=ax^3+(-3a+b)x^2+(c-3b)x-3c$. Maintenant par identification on obtient

$$\left\{\begin{array}{ccc} a & = & 1 \\ -3a+b & = & 0 \\ c-3b & = & -6 \\ -3c & = & -9 \end{array}\right.$$

Ce qui donne

$$\left\{\begin{array}{rcl} a & = & 1 \\ b & = & 3 \\ c & = & 3 \\ c & = & 3 \end{array}\right.$$

Et finalement

$$P(x) = (x-3)(x^2+3x+3)$$

Il nous reste plus qu'à trouver les racines de $x^2 + 3x + 3$ que l'on fait grâce à son discriminant qui vaut $\Delta = 9 - 12 < -3$.

$$\boxed{\text{L'unique racine réelle de } P \text{ est } 3}$$

Je rajoute le graphique de la courbe représentative de P avec le programme Python qui permet de le tracer.

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
def P(x):
      return(x**3-6*x+9)
X=np.linspace(-5,5,100)
Y=P(X)
Z=np.zeros(100)
plt.plot(X,Y)
plt.plot(X,Z)
plt.show()
```