

DM2

à rendre pour le

Exercice 1. On cherche à résoudre l'équation (E) suivante, d'inconnue réelle x :

$$\lfloor \sqrt{x} \rfloor = \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor$$

1. Donner le domaine de définition de l'équation (E) .
2. Ecrire un programme python qui demande à l'utilisateur un flottant x et qui renvoie True si le réel est solution de l'équation (E) et False sinon.
3. Montrer que toute solution x de (E) est solution du système (S) suivant :

$$\begin{cases} \sqrt{x} < \frac{x}{2} + 1 \\ \frac{x}{2} - 1 < \sqrt{x} \end{cases}$$

4. Résoudre le système (S) .
5. Soit $\alpha = 2(2 + \sqrt{3})$ Calculer la partie entière de α .
6. Pour tout $k \in \llbracket 0, 7 \rrbracket$ déterminer si les réels de l'intervalle $[k, k + 1[$ sont solutions de (E) .
7. Conclure.

Exercice 2. On cherche les racines réelles du polynôme $P(x) = x^3 - 6x - 9$.

1. Donner en fonction du paramètre x réel, le nombre de solutions réelles de l'équation $x = y + \frac{2}{y}$ d'inconnue $y \in \mathbb{R}^*$.
2. Soit $x \in \mathbb{R}$ vérifiant $|x| \geq 2\sqrt{2}$. Montrer en posant le changement de variable $x = y + \frac{2}{y}$ que :

$$P(x) = 0 \iff y^6 - 9y^3 + 8 = 0$$

3. Résoudre l'équation $z^2 - 9z + 8 = 0$ d'inconnue $z \in \mathbb{R}$.
4. En déduire une racine du polynôme P .
5. Donner toutes les racines réelles du polynôme P .