Correction DM3

Exercice 1. Donner l'ensemble de définition de

$$f(x) = \sqrt{e^x - 2}$$

Résoudre

$$f(x) \geq e^x - 4$$

Correction 1. f est bien définie pour tout x tel que $e^x - 2 \geq 0$ c'est à dire pour $e^x \geq 2$ soit $x \geq \ln(2)$

$$\boxed{D_f = [\ln(2), +\infty[}$$

On fait le changement de variable $e^x = X$, l'équaiton $f(x) \geq e^x - 4$ équivaut alors à

$$\sqrt{X-2} \geq X - 4 \quad (E')$$

(E') est bien définie sur $[2, +\infty[$

On étudie alors le signe de $X - 4$

— Si $X - 4 \geq 0$, ie $X \in [4, +\infty[$.

$$\begin{aligned} E' &\iff X - 2 \geq X^2 - 8X + 16 \\ &\iff X^2 - 9X + 18 \leq 0 \end{aligned}$$

Le discriminant de $X^2 - 9X + 18$ vaut $\Delta = 9^2 - 4 * 18 = 81 - 72 = 9 = 3^2$ On a donc deux racines réelles :

$$X_1 = \frac{9+3}{2} = 6 \quad \text{et} \quad X_2 = \frac{9-3}{2} = 3$$

Donc $(E') \iff (X-6)(X-3) \leq 0$ d'où les solutions sur $[4, +\infty[$:

$$\mathcal{S}_1 = [4, 6]$$

— Si $X - 4 < 0$, ie $X \in]-\infty, 4[$.

Alors comme $\sqrt{X-2} \geq 0$ et $X - 4 < 0$, tous les réels de l'ensemble de définition sont solutions

$$\mathcal{S}_2 = [2, 4]$$

Ainsi les solutions de (E') sont

$$\mathbb{S}' = [2, 6]$$

On repasse à la variable x on a $e^x = X$ donc $x = \ln(X)$

$$\boxed{\text{Les solutions de l'équation } f(x) \geq e^x - 4 \text{ sont } \mathcal{S} = [\ln(2), \ln(6)]}$$

Exercice 2. Ecrire $(1+i)$ sous forme trigonométrique. En déduire la partie réelle et la partie imaginaire de

$$\frac{1}{(1+i)^n}$$

en fonction de n.

Exercice 3. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue z et de paramétre $a \in \mathbb{R}$

$$z^2 + z + a = 0$$

Exercice 4. Soit $\mathbb{U}$ l'ensemble des complexes de module 1.

1. Calculer
$$\inf\left\{\left|\frac{1}{z} + z\right|, z \in \mathbb{U}\right\}$$
2. Pour tout $z \in \mathbb{C}^*$ on note $\alpha(z) = \frac{1}{z} + \overline{z}$.
   (a) Calculer le module de $\alpha(z)$ en fonction de celui de z.
   (b) Montrer que pour tout $x > 0$ on a : $\dfrac{1}{x} + x \geq 2$.
   (c) En déduire
   $$\inf\{|\alpha(z)|, z \in \mathbb{C}^*\}$$

Correction 2.

1. Comme $z \in \mathbb{U}$, il existe $\theta \in [0, 2\pi[$ tel que $z = e^{i\theta}$. Donc
$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{z} + z\right| &= \left|e^{-i\theta} + e^{i\theta}\right| \\ &= \left|2\cos(\frac{\theta}{2}\right|\end{aligned}$$

   Pour $\theta = \pi$ on a $\left|2\cos(\frac{\theta}{2}\right| = 0$ donc
$$\inf\left\{\left|\frac{1}{z} + z\right|, z \in \mathbb{U}\right\} = 0$$

2. (a)

$$
\begin{aligned}
|\alpha(z)| &= \left|\frac{1}{\overline{z}} + z\right| \\
&= \left|\frac{1 + z\overline{z}}{\overline{z}}\right| \\
&= \left|\frac{1 + |z|^2}{\overline{z}}\right| \\
&= \frac{|1 + |z|^2|}{|\overline{z}|} \\
&= \frac{1 + |z|^2}{|z|} \\
&= \frac{1}{|z|} + |z|
\end{aligned}
$$

(b) Pour tout $x > 0$ on a

$$
\begin{aligned}
x + \frac{1}{x} - 2 &= \frac{x^2 - 2x + 1}{x} \\
&= \frac{(x-1)^2}{x} \geq 0
\end{aligned}
$$

Donc pour tout $x > 0$, $x + \frac{1}{x} - 2 \geq 0$.

(c) On a $|\alpha(1)| = \frac{1}{|1|} + |1| = 2$ et on a vu que pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, $|\alpha(z)| \geq 2$ donc

$$\inf\{|\alpha(z)|\,, z \in \mathbb{C}^*\} = 2$$