Correction DM5

Exercice 1. Soit $\epsilon \in]0,1[$ et $u \in \mathbb{C}$ tel que $|u| \leq 1-\epsilon$. Soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $z_0 = i+u$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$z_{n+1} = z_n^2 - 2iz_n - 1 + i$$

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|z_n - i| \leq (1-\epsilon)^{2^n}$. En déduire la limite de $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Correction 1. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$z_{n+1} - i = z_n^2 - 2iz_n - 1 = (z_n - i)^2$$

.

On va procéder par récurrence. Pour $n = 0$ on a

$$|z_0 - i| = |u| \leq 1 - \epsilon = (1-\epsilon)^{2^0}$$

Supposons donc qu'il existe n tel que $|z_n - i| \leq (1-\epsilon)^{2^n}$ et montrons l'inégalité pour $(n+1)$

On a

$$z_{n+1} - i = z_n^2 - 2iz_n - 1 = (z_n - i)^2.$$

Donc

$$|z_{n+1} - i| = |z_n - i|^2,$$

D'après l'hypothése de récurrence on a $|z_n - i| \leq (1-\epsilon)^{2^n}$, d'où

$$|z_n - i|^2 \leq \left((1-\epsilon)^{2^n}\right)^2 = (1-\epsilon)^{2\times 2^n}$$

C'est à dire

$$|z_{n+1} - i| \leq (1-\epsilon)^{2^{n+1}}$$

L'inégalité est donc héréditaire et la propriété est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Comme $|1-\epsilon| < 1$ on a $\lim_{n\to\infty}(1-\epsilon)^{2^{n+1}} = 0$ donc

$$\lim_{n\to\infty} z_n = i.$$

Exercice 2. On note $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.

1. Montrer que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone.
2. Montrer que pour tout $k \geq 2$

$$\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$$

3. En déduire que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite $\ell \in [0,2]$.

Correction 2.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $S_{n+1} = S_n + \frac{1}{(n+1)^2}$, donc $S_{n+1} - S_n = \frac{1}{(n+1)^2} \geq 0$. Ainsi, $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
2. Pour tout $k \geq 2$: $\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} = \frac{k-(k-1)}{k(k-1)} = \frac{1}{k(k-1)}$ Or pour tout $k \geq 2$, $0 < k(k-1) \leq k^2$. Comme la fonction inverse est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ on a donc :
$$\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} = \frac{1}{k(k-1)} \geq \frac{1}{k^2}$$
3. D'après la question précédente, on peut majorer tous les termes de S_n à partir du rang $k=2$. On a alors :
$$S_n = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$$
On reconnait alors dans le membre de droite une somme téléscopique qui se simplifie de la manière suivante :
$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} = \frac{1}{2-1} - \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{n}$$
On obtient alors $S_n \leq 2 - \frac{1}{n}$. La suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée, d'après le théorème des limlites monotones la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, notons ℓ sa limite.
Comme $0 \leq S_n \leq 2 - \frac{1}{n}$ et $\lim_{n\to\infty} 2 - \frac{1}{n} = 2$, le théorème d'encadrement assure que $\ell \in [0,2]$.

Exercice 3 (Suite de Fibonacci)**.** Soit $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et pour tout $n \geq 0$
$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $\sum_{k=0}^{n} F_{2k+1} = F_{2n+2}$ et $\sum_{k=0}^{n} F_{2k} = F_{2n+1} - 1$.
2. Montrer que pout tout $n \in \mathbb{N}$ on a $\sum_{k=0}^{n} F_k^2 = F_n F_{n+1}$.
3. (a) On note $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\psi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Montrer que $\varphi^2 = \varphi + 1$ et $\psi^2 = \psi + 1$.
   (b) Montrer que l'expression explicite de F_n st donnée par $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^n - \psi^n)$.
   (c) En déduire que $\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \varphi$.

Correction 3.

1. Nous allons montrer ces propriétés par récurrence sur l'entier $n \in \mathbb{N}$. Soit $\mathcal{P}(n)$ la prorpriété définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$\mathcal{P}(n) := \text{ « } \sum_{k=0}^{n} F_{2k+1} = F_{2n+2} \text{ et } \sum_{k=0}^{n} F_{2k} = F_{2n+1} - 1 \text{ ».}$$

Montrons $\mathcal{P}(0)$. Vérifions la première égalité :

$$\sum_{k=0}^{0} F_{2k+1} = F_{0+1} = F_1 = 1$$

et

$$F_2 = F_1 + F_0 = 1$$

Donc la première égalité est vraie au rang 0.
Vérifions la sedonde égalité :

$$\sum_{k=0}^{0} F_{2k} = F_0 = 0$$

et

$$F_{2*0+1} - 1 = F_1 - 1 = 0$$

Donc la seconde égalité est vraie au rang 0. Ainsi $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
Hérédité :
Soit $n \geq 0$ fixé. On suppose la propriété vraie à l'ordre n. Montrons qu'alors $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Considérons la première égalité de $\mathcal{P}(n+1)$. Son membre de gauche vaut :

$$\sum_{k=0}^{n+1} F_{2k+1} = \sum_{k=0}^{n} F_{2k+1} + F_{2n+3}$$

Par hypothèse de récurrence on a $\sum_{k=0}^{n} F_{2k+1} = F_{2n+2}$, donc

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1} F_{2k+1} &= F_{2n+2} + F_{2n+3}.\\ &= F_{2n+4}. \quad \text{d'après la définition de } (F_n)_{n\in\mathbb{N}}\\ &= F_{2(n+1)+2}.\end{aligned}$$

La première égalité est donc héréditaire.

Considérons la sedonde égalité de $\mathcal{P}(n+1)$. Son membre de gauche vaut :

$$\sum_{k=0}^{n+1} F_{2k} = \sum_{k=0}^{n} F_{2k} + F_{2n+2}$$

Par hypothèse de récurrence on a $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} F_{2k} = F_{2n+1} - 1$, donc

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1} F_{2k} &= F_{2n+1} - 1 + F_{2n+2}.\\ &= F_{2n+3} - 1. \quad \text{d'après la définition de } (F_n)_{n\in\mathbb{N}}\\ &= F_{2(n+1)+1} - 1.\end{aligned}$$

La seconde égalité est donc héréditaire. Finalement la propriété $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
Conclusion :
Il résulte du principe de récurrence que pour tout $n \geq 0$:

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} F_{2k+1} = F_{2n+2} \text{ et } \sum_{k=0}^{n} F_{2k} = F_{2n+1} - 1}$$

2. On va montrer par récurrence que $\mathcal{P}(n)$: $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} F_k^2 = F_n F_{n+1}$.

   Initialisation : Pour $n = 0$, on a $\sum_{k=0}^{0} F_k^2 = F_0^2 = 0$ et $F_0 F_1 = 0$. La propriété est donc vraie au rang 0.
   Hérédité :
   Soit $n \geq 0$ fixé. On suppose la propriété vraie à l'ordre n.
   On a $\displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} F_k^2 = \sum_{k=0}^{n} F_k^2 + F_{n+1}^2$ Par hypothèse de récurrence on a $\sum_{k=0}^{n} F_k^2 = F_n F_{n+1}$ donc :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1} F_k^2 &= F_n F_{n+1} + F_{n+1}^2\\ &= F_{n+1}(F_n + F_{n+1})\\ &= F_{n+1} F_{n+2} \quad \text{par définition de } (F_n)_{n\in\mathbb{N}}\end{aligned}$$

   La propriété $\mathcal{P}$ est donc vraie au rang $n+1$.
   Conclusion :
   Il résulte du principe de récurrence que pour tout $n \geq 0$:

$$\boxed{\mathcal{P}(n) : \sum_{k=0}^{n} F_k^2 = F_n F_{n+1}}$$

3. Le polynôme du second degrès $X^2 - X - 1$ a pour discriminant $\Delta = 1 + 4 = 5$ les racines sont donc $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\psi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. En particulier, ces nombres vérifient : $\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$ et $\psi^2 - \psi - 1 = 0$, c'est-à-dire

$$\boxed{\varphi^2 = \varphi + 1 \text{ et } \psi^2 = \psi + 1.}$$

4. Notons :$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^n - \psi^n)$ On a

$$u_0 = \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^0 - \psi^0) = 0$$
$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^1 - \psi^1) = 1$$

et pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$\begin{aligned}
u_{n+2} &= \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^{n+2} - \psi^{n+2}) \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^n(\varphi^2) - \psi^n(\psi^2)) \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^n(\varphi + 1) - \psi^n(\psi + 1)) \quad \text{D'après la question précédente} \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^{n+1} + \varphi^n - \psi^{n+1} - \psi^n) \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^{n+1} - \psi^{n+1}) + \frac{1}{\sqrt{5}}\varphi^n - \psi^n) \\
&= u_{n+1} + u_n
\end{aligned}$$

Donc u_n satisfait aussi la relation de récrurrence. Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^n - \psi^n)$.

5. D'après la question précédente on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{\varphi^{n+1} - \psi^{n+1}}{\varphi^n - \psi^n}$$

Donc,

$$\begin{aligned}
\frac{F_{n+1}}{F_n} &= \varphi \frac{\varphi^n \left(1 - \frac{\psi^{n+1}}{\varphi^{n+1}}\right)}{\varphi^n \left(1 - \frac{\psi^n}{\varphi^n}\right)} \\
&= \varphi \frac{1 - \left(\frac{\psi}{\varphi}\right)^{n+1}}{1 - \left(\frac{\psi}{\varphi}\right)^n}
\end{aligned}$$

Remarquons que $|\varphi| > |\psi|$ en particulier $|\frac{\psi}{\varphi}| < 1$ et donc

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\psi}{\varphi}\right)^{n+1} = 0.$$

Finalemetn

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\frac{F_{n+1}}{F_n} = \varphi.}$$

Exercice 4 (Vous pouvez attendre vendredi pour le faire)**.** Calculer

$$\sum_{i,j\in[\![1,n]\!]}\min(i,j)$$

Correction 4. Solution 1 :

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j\in[\![1,n]\!]}\min(i,j) &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\min(i,j)\\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}\min(i,j) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n}\min(i,j)\\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}j + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n}i\\
&= \sum_{i=1}^{n}\frac{i(i+1)}{2} + \sum_{i=1}^{n}(n-i)i\\
&= \sum_{i=1}^{n}\frac{-i^2+(2n+1)i}{2}\\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}-i^2 + (2n+1)\sum_{i=1}^{n}i\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(-\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (2n+1)\frac{n(n+1)}{2}\right)\\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}
\end{aligned}$$

Solution 2 :

$$
\begin{aligned}
\sum_{i,j\in[\![1,n]\!]} \min(i,j) &= \sum_{i,j\in[\![1,n]\!],i=j} \min(i,j) + \sum_{i,j\in[\![1,n]\!],i<j} \min(i,j) + \sum_{i,j\in[\![1,n]\!],j<i} \min(i,j) \\
&= \left(\sum_{i\in[\![1,n]\!]} i\right) + \left(2\sum_{i,j\in[\![1,n]\!],i<j} i\right) \\
&= \frac{n(n+1)}{2} + 2\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} i \\
&= \frac{n(n+1)}{2} + 2\sum_{i=1}^{n-1}(n-i)i \\
&= \frac{n(n+1)}{2} + 2\sum_{i=1}^{n-1}(n-i)i \\
&= \frac{n(n+1)}{2} + 2\left(\frac{n^2(n-1)}{2} - \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}\right) \\
&= \frac{n(n+1)}{2} + 2\frac{n(n-1)(n+1)}{6} \\
&= \frac{n(n+1)(3+2(n-1))}{6} \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}
\end{aligned}
$$