DM7

A avoir compris avant le prochain DS !

Copies accéptées le lundi et rendues le mardi

Exercice 1 (D'après DS chaptal 2020)**.** Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on définit I_n

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n}(t)dt$$

1. Montrer que $I_0 = \frac{\pi}{2}$.
2. En utilisant une intégration par parties, démontrer que pour tout entier $n \geq 1$ on a :
$$I_n = \frac{2n-1}{2n} I_{n-1}$$
(on pourra utiliser que $\cos^{2n}(t) = \cos^{2n-1}(t)\cos(t)$)
3. En déduire que
$$I_n = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\frac{\pi}{2}$$

Exercice 2. Le but de cet exercice est de déterminer toutes les fonctions x dérivable sur $\mathbb{R}$ telles que pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$x(t) > 0 \quad \text{et} \quad x'(t) + e^t f(t)x(t)^2 + x(t) = 0$$

où $f(t) = \frac{t}{t^2+1}$.

⚠ Cette équation n'est PAS linéaire et ne rentre pas dans le cadre du cours.

1. (a) Justifier que la fonction f admet des primitives sur $\mathbb{R}$ et déterminer l'unique primitive qui s'annule en 0 qu'on notera F_0.
   (b) Montrer que F_0 admet un minimum m et calculer sa valeur.
2. Pour cette question, on fixe une fonction x solution du problème et on pose $y = 1/x$.
   (a) Montrer que y est solution d'une équation différentielle linéaire à déterminer.
   (b) Résoudre l'équation différentielle obtenue à la question précédente. On pourra chercher une solution particulière de la fome $t \mapsto \lambda(t)e^t$, où λ est une fonction à déterminer.
3. En déduire que toutes les solutions du problème sont de la forme :
$$x : t \mapsto \frac{e^{-t}}{C + \frac{1}{2}\ln(t^2+1) + \arctan(t)}$$
où C est une constante telle que $C > -m$.