DM 8

Exercice 1. 1. A quelle condition sur $X, Y \in \mathbb{R}$ a-t-on

$$X = Y \iff X^2 = Y^2$$

2. On se propose de résoudre l'équation :

$$|\cos(x)| = |\sin(x)|. \tag{1}$$

(a) Montrer que (1) est équivalent à $\cos(2x) = 0$.

(b) En déduire les solutions dans $\mathbb{R}$ puis dans $[-\pi, \pi[$

Correction 1.

1. On a $X = Y \iff X^2 = Y^2$ si X et Y sont de même signe.
2. Comme $|\cos(x)| \geq 0$ et $|\sin(x)| \geq 0$ l'équation est équivalente à $\cos^2(x) = \sin^2(x)$, soit encorrectione

$$\cos(2x) = 0.$$

On a donc $2x \equiv \frac{\pi}{2} \quad [\pi]$ ou encorrectione

$$x \equiv \frac{\pi}{4} \quad [\frac{\pi}{2}]$$

Les solutions sur $\mathbb{R}$ sont

$$\mathcal{S} = \bigcup_{k \in Z} \{\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}\}$$

Sur $[-\pi, \pi[$ les solutions sont :

$$\mathcal{S} \cap [-\pi, \pi[= \{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{-\pi}{4}, \frac{-3\pi}{4}\}$$

Exercice 2. Soit z_1 et z_2 deux complexes tel que $|z_1| < 1$ et $|z_2| < 1$. A l'aide d'un raisonnement par l'absurde montrer que $z_1 + z_2 \neq 2$

Correction 2. Soient z_1, z_2 deux complexes tel que $|z_1| < 1$ et $|z_2| < 1$ et supposons par l'absurde que $z_1 + z_2 = 2$

On a alors

$$|z_1 + z_2| = |2| = 2$$

D'après l'inégalité triangulaire on a :

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

et donc comme $|z_1| < 1$ et $|z_2| < 1$ on a :

$$|z_1 + z_2| < 1 + 1 = 2$$

On obtient

$$2 < 2$$

ce qui est absurde. La proposition est donc démontrée.

Exercice 3. Soit E un ensemble et A, B deux sous-ensembles de E. On appelle *différence symétrique* de A et B, notée $A\Delta B$ le sous-ensemble de E définie par :

$$A\Delta B = (A\cap \overline{B})\cup\left(\overline{A}\cap B\right).$$

1. Calculer $A\Delta A$, $A\Delta\emptyset$, $A\Delta E$ et $A\Delta\overline{A}$.
2. Montrer que $A\Delta B = A$ si et seulement si $B=\emptyset$.
3. Montrer que pour tout A, B, C sous-ensembles de E on a :

$$(A\Delta B)\cap C = (A\cap C)\Delta(B\cap C).$$

Correction 3.

1. On obtient

$$\begin{aligned} A\Delta A = \emptyset \quad &\text{et}\quad A\Delta\emptyset = A\\ A\Delta E = \overline{A} \quad &\text{et}\quad A\Delta\overline{A} = E\end{aligned}$$

2. Si $B=\emptyset$ on vient de voir que $A\Delta B = A$. Montrons maintenant l'implication réciproque, on suppose donc que $A\Delta B = A$, c'est à dire :

$$(A\cap\overline{B})\cup\left(\overline{A}\cap B\right) = A \quad (H)$$

On a donc $A\cap\left((A\cap\overline{B})\cup\left(\overline{A}\cap B\right)\right) = A\cap A$ et par distributivé de l'intersection vis-à-vis de l'union :

$$\left(A\cap(A\cap\overline{B})\right)\cup\left(A\cap\left(\overline{A}\cap B\right)\right) = A \quad (*)$$

Or on a d'une part

$$A\cap(A\cap\overline{B}) = (A\cap A)\cap\overline{B} = A\cap\overline{B}$$

et d'autre part

$$A\cap\left(\overline{A}\cap B\right) = (A\cap\overline{A})\cap B = \emptyset$$

En injectant ces deux égalités dans $(*)$ on obtient

$$A\cap\overline{B} = A$$

D'où

$$\boxed{A\subset\overline{B}}$$

En revenant à l'hypothèse (H) on a donc

$$A\cup\left(\overline{A}\cap B\right) = A$$

d'où $\left(\overline{A}\cap B\right)\subset A$. En prenant l'union avec A et en utilisant la dsitributé de l'union on obient

$$\begin{aligned} A\cup\left(\overline{A}\cap B\right) &\subset A\cup A\\ (A\cup\overline{A})\cap(A\cap B) &\subset A\\ A\cap B &\subset A\end{aligned}$$

Finalement on obtient

$$\boxed{B\subset A}$$

On a donc obtenu $B \subset A \subset \overline{B}$, donc
$$B \subset \overline{B}$$
Soit en prenant l'intersection avec B :
$$B \cap B \subset B \cap \overline{B} = \emptyset$$
$$\boxed{B = \emptyset}$$

3. On a d'une part :
$$\begin{aligned}(A\Delta B) \cap C &= (A \cap \overline{B}) \cup \left(\overline{A} \cap B\right) \cap C \\ &= \Big((A \cap \overline{B}) \cap C\Big) \cup \Big(\,(\overline{A} \cap B) \cap C\Big) \\ &= \Big((A \cap C) \cap \overline{B}\Big) \cup \Big(\overline{A} \cap (B \cap C)\Big)\end{aligned}$$
On a d'autre part
$$(A \cap C)\Delta(B \cap C) = ((A \cap C) \cap \overline{(B \cap C)}) \cup \Big(\overline{(A \cap C)} \cap (B \cap C)\Big)$$
Simplifions la première parenthèse :
$$(A \cap C) \cap \overline{(B \cap C)} = (A \cap C) \cap \left(\overline{B} \cup \overline{C}\right)$$
On utilise la distributivité de l'union vis-à-vis de l'intersection $(E \cap (F \cup G) = (E \cap F) \cup (E \cap G)$, avec $E = A \cap C, F = \overline{B}$ et $G = \overline{C})$ On obtient :
$$(A \cap C) \cap \overline{(B \cap C)} = \Big((A \cap C) \cap \overline{B}\Big) \cup \Big((A \cap C) \cap \overline{C}\Big)$$
Comme $C \cap \overline{C} = \emptyset$ on a donc
$$(A \cap C) \cap \overline{(B \cap C)} = \Big((A \cap C) \cap \overline{B}\Big)$$
Le même raisonnement conduit à la simplification de la deuxième parenthèse :
$$\Big(\overline{(A \cap C)} \cap (B \cap C)\Big) = \Big(\overline{A} \cap (B \cap C)\Big)$$
On obtient donc bient
$$\boxed{(A\Delta B) \cap C = (A \cap C)\Delta(B \cap C).}$$