

DM 8

Exercice 1. 1. A quelle condition sur $X, Y \in \mathbb{R}$ a-t-on

$$X = Y \iff X^2 = Y^2$$

2. On se propose de résoudre l'équation :

$$|\cos(x)| = |\sin(x)|. \quad (1)$$

(a) Montrer que (1) est équivalent à $\cos(2x) = 0$.

(b) En déduire les solutions dans \mathbb{R} puis dans $[-\pi, \pi[$

Exercice 2. Soit z_1 et z_2 deux complexes tel que $|z_1| < 1$ et $|z_2| < 1$. A l'aide d'un raisonnement par l'absurde montrer que $z_1 + z_2 \neq 2$

Exercice 3. Soit E un ensemble et A, B deux sous-ensembles de E . On appelle *différence symétrique* de A et B , notée $A\Delta B$ le sous-ensemble de E définie par :

$$A\Delta B = (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B).$$

1. Calculer $A\Delta A$, $A\Delta\emptyset$, $A\Delta E$ et $A\Delta\overline{A}$.

2. Montrer que $A\Delta B = A$ si et seulement si $B = \emptyset$.

3. Montrer que pour tout A, B, C sous-ensembles de E on a :

$$(A\Delta B) \cap C = (A \cap C) \Delta (B \cap C).$$