DM9

à refaire avant le prochain DS

Exercice 1. Soit A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Résoudre le système $AX = \lambda X$ d'inconnue $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ où λ est un paramètre réel.
2. Soit $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, et $e_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Calculer Ae_1, Ae_2 et Ae_3.
3. Montrer par récurrence que $A^n e_1 =$.
4. Par analogie avec la question précédente, donner la valeur de $A^n e_2$ et $A^n e_3$.
5. Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$
   Montrer que P est inversible et calculer son inverse.
6. Soit $D = P^{-1}AP$. Calculerr D.
7. Montrer par récurrence que $D^n = P^{-1}A^nP$
8. En déduire la valeur de A^n.
9. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites définies par : $x_0 = 1, y_0 = 1$ et $z_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:
   $$\begin{cases} x_{n+1} & = & & -y_n + z_n \\ y_{n+1} & = 4x_n & & +y_n - 2z_n \\ z_{n+1} & = 2x_n & & -2x_n + z_n \end{cases}$$
   Soit $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$
   Montrer que $X_{n+1} = AX_n$.
10. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
    $$X_n = A^n X_0$$
11. En déduire le terme général de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en fonction de n.

Correction 1.

1. $AX=\lambda X \iff \left\{\begin{array}{cccc} & -y & +z= & \lambda x\\ 4x & +y & -2z= & \lambda y\\ 2x & -2y & +z= & \lambda z\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{cccc} -\lambda x & -y & +z= & 0\\ 4x & +(1-\lambda)y & -2z= & 0\\ 2x & -2y & +(1-\lambda)z= & 0\end{array}\right.$

   Ensuite on échelonne le système (Après beaucoup de fautes de calculs) on obtient :

$$\iff \left\{\begin{array}{cccc} 2x & -2y & +(1-\lambda)z= & 0\\ 0 & +(5-\lambda)y & (-4+2\lambda)z= & 0\\ 0 & (-\lambda-1)y & +\frac{1}{2}(2-\lambda-\lambda^2)z= & 0\end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{cccc} 2x & -2y & +(1-\lambda)z= & 0\\ 0 & +(5-\lambda)y & 2(\lambda-2)z= & 0\\ 0 & -(\lambda+1)y & -\frac{1}{2}(\lambda+1)(\lambda-2)z= & 0\end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{cccc} 2x & +(1-\lambda)z & -2y= & 0\\ 0 & +2(\lambda-2)z & +(5-\lambda)y= & 0\\ 0 & -\frac{1}{2}(\lambda+1)(\lambda-2)z & -(\lambda+1)y= & 0\end{array}\right.$$

   et enfin $L_3 \leftarrow L_3+\frac{1}{4}(\lambda+1)L_2$ donne :

$$\iff \left\{\begin{array}{cccc} 2x & +(1-\lambda)z & -2y= & 0\\ 0 & +2(\lambda-2)z & +(5-\lambda)y= & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{4}(-\lambda^2+1)y= & 0\end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{cccc} 2x & +(1-\lambda)z & -2y= & 0\\ 0 & +2(\lambda-2)z & +(5-\lambda)y= & 0\\ 0 & 0 & (-\lambda+1)(\lambda+1)y= & 0\end{array}\right.$$

   Donc si $\lambda-2\neq 0$ et $(-\lambda+1)(\lambda+1)\neq 0$, le système est de rang 3. Il admet une unique solution à savoir $S=\{(0,0,0)\}$

   Si $\lambda=1$ Le système équivaut à

$$\left\{\begin{array}{cccc} 2x & & -2y= & 0\\ 0 & -2z & 4y= & 0\\ 0 & 0 & 0= & 0\end{array}\right.$$

   Il est échelonné de rang 2. Les solutions sont de la forme :

$$\mathcal{S}=\{(y,y,2y)\, y\in\mathbb{R}\}$$

   Si $\lambda=2$ Le système équivaut à

$$\left\{\begin{array}{cccc} 2x & -z & -2y= & 0\\ 0 & & 3y= & 0\\ 0 & 0 & -3y= & 0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{cccc} 2x & -z & -2y= & 0\\ 0 & & 3y= & 0\\ 0 & 0 & 0= & 0\end{array}\right.$$

   Il est échelonné de rang 2. Les solutions sont de la forme :

$$\mathcal{S}=\{(2x,0,x)\, x\in\mathbb{R}\}$$

Si $\lambda = -1$ Le système équivaut à

$$\left\{\begin{array}{cccc} 2x & +2z & -2y = & 0 \\ 0 & -6z & 6y = & 0 \\ 0 & 0 & 0 = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{cccc} 2x & +2z & -2y = & 0 \\ 0 & z & = & y \end{array}\right.$$

Il est échelonné de rang 2. Les solutions sont de la forme :

$$\mathcal{S} = \{(0, y, y)\, y \in \mathbb{R}\}$$

2. $Ae_1 = e_1$, $Ae_2 = 2e_2$ et $Ae_3 = -e_3$
3. C'est vrai pour $n = 1$. On suppose que le résultat est vrai pour un certain entier $n \in \mathbb{N}$, on a alors $A^{n+1}e_1 = AA^ne_1 = Ae_1$ par HR. Puis $Ae_1 = e_1$ d'après la question précédente. On a alors $A^{n+1}e_1 = e_1$. Par récurrence le résultat est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$
4. $A^n = 2^ne_2$ et $A^ne_3 = (-1)^ne_3$
5. cf ex 8
$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
6. cf ex 8 $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$
7. cf ex 6
8. $A^n = PD^nP^{-1}$ Or $D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix}$ (ca ne marche QUE pour les matrices diagonales)
Donc
$$A^n = \begin{pmatrix} 2 - 2^n & 1 - 2^n & -1 + 2^n \\ 2 - 2(-1)^n & 1 & -1 + (-1)^n \\ 4 - 2^{n+1} - 2(-1)^n & 2 - 2^{n+1} & -2 + 2^{n+1} + (-1)^n \end{pmatrix}$$
9. $X_{n+1} = \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix}$
et $AX_n = A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y_n + z_n \\ 4x_n + y_n - 2z_n \\ 2x_n - 2y_n + z_n \end{pmatrix}$
Ce qui est bien le système vérifiée par les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}, (z_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
10. C'est vrai pour $n = 0$ ($A^0 = \mathrm{Id}$) C'est aussi vrai pour $n = 1$ (calcul) On suppose le résultat vrai pour UN $n \in \mathbb{N}$ On a alors : $X_n = A^nX_0$ et donc $AX_n = A^{n+1}X_0$. Or d'après la question précédente $AX_n = X_{n+1}$. La propriété est donc héréditaire et donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

11. On fait le calcul de $A^n X_0$ grace au résultat trouvé à la question 8. On obtient

$$x_n = 2 - 2^n + 1 - 2^n - 1 + 2^n = 2 - 2^n$$