

# DS 1

Durée 3h

- Les calculatrices sont interdites durant les cours, TD et *a fortiori* durant les DS de mathématiques.
- Si vous pensez avoir découvert une erreur, indiquez-le clairement sur la copie et justifiez les initiatives que vous êtes amenés à prendre.
- Une grande attention sera apportée à la clarté de la rédaction et à la présentations des solutions. (Inscrivez clairement en titre le numéro de l'exercice, vous pouvez aussi encadrer les réponses finales.)
- Vérifiez vos résultats.
- Le résultat d'une question peut être admis et utilisé pour traiter les questions suivantes en le signalant explicitement sur la copie.

**Exercice 1.** Résoudre pour  $x \in \mathbb{R}$  l'inéquation

$$\frac{1}{x+1} \leq \frac{x}{x+2}. \quad (I)$$

Ecrire un script Python, qui demande à l'utilisateur un nombre flottant  $x$  et qui affiche True si  $x$  vérifie l'inéquation (I) et False sinon.

**Exercice 2.** Soit  $f$  la fonction définie par :

$$f : x \mapsto \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$$

1. Etudier la parité de  $f$ .
2. Donner les limites de  $f$  en  $+\infty$  et  $-\infty$ .
3. Dresser le tableau de variations de  $f$

**Exercice 3.** On considère l'équation suivante d'inconnue  $x \in \mathbb{R}$  :

$$\lfloor 2x - \sqrt{5x - 1} \rfloor = 0 \quad (E)$$

1. Déterminer le domaine de définition de  $(E)$ .
2. Dire si les réels suivants sont solutions ou non de  $(E)$

$$x_1 = \frac{1}{5}, x_2 = \frac{1}{2}, x_3 = 1, x_4 = 12$$

3. Pour tout  $a \in \mathbb{R}$ , rappeler un encadrement de la partie entière de  $a$  en fonction de  $a$ .
4. Montrer que résoudre  $(E)$  est équivalent à résoudre le système :

$$\begin{cases} \sqrt{5x - 1} > 2x - 1 & (E_1) \\ \sqrt{5x - 1} \leq 2x & (E_2) \end{cases}$$

5. Résoudre les deux inéquations obtenues à la question précédente.
6. Résoudre  $(E)$ .

**Exercice 4.** On considère les nombres réels  $\alpha = \sqrt[3]{2 + \sqrt{5}}$  et  $\beta = \sqrt[3]{2 - \sqrt{5}}$ . On rappelle que pour tout réel  $y$  on note  $\sqrt[3]{y}$  l'unique solution de l'équation  $x^3 = y$  d'inconnue  $x$ .

Le but de l'exercice est de donner des expressions simplifiées de  $\alpha$  et  $\beta$ .

1. Ecrire un script Python qui permet d'afficher une valeur approchée de  $\alpha$ .
2. (a) Calculer  $\alpha\beta$  et  $\alpha^3 + \beta^3$ .  
(b) Vérifier que  $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, (a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ .  
(c) En déduire que  $(\alpha + \beta)^3 = 4 - 3(\alpha + \beta)$
3. On pose  $u = \alpha + \beta$  et on considère la fonction polynomiale  $P : x \mapsto x^3 + 3x - 4$ .  
(a) A l'aide de la question précédente montrer que  $u$  est une racine de  $P$  c'est-à-dire que  $P(u) = 0$ .  
(b) Trouver une autre racine « évidente » de  $P$ .  
(c) Trouver trois nombres réels  $a, b$ , et  $c$  tels que  $\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = (x - 1)(ax^2 + bx + c)$   
(d) Résoudre l'équation  $P(x) = 0$  pour  $x \in \mathbb{R}$ .  
(e) En déduire la valeur de  $u$ .
4. On considère la fonction polynomiale  $Q : x \mapsto Q(x) = (x - \alpha)(x - \beta)$   
(a) A l'aide des questions précédentes, développer et simplifier  $Q(x)$  pour tout nombre réel  $x$ .  
(b) En déduire des expressions plus simples de  $\alpha$  et  $\beta$ .