DS 2

Durée 3h30

- Les calculatrices sont <u>interdites</u> durant les cours, TD et *a fortiori* durant les DS de mathématiques.
- Si vous pensez avoir découvert une erreur, indiquez-le clairement sur la copie et justifiez les initiatives que vous êtes amenés à prendre.
- Une grande attention sera apportée à la clarté de la rédaction et à la présentations des solutions. (Inscrivez clairement en titre le numéro de l'exercice, vous pouvez aussi encadrer les réponses finales.)
- Vérifiez vos résultats.
- Le résultat d'une question peut être admis et utilisé pour traiter les questions suivantes en le signalant explicitement sur la copie.

Exercice 1. **1**. Comparer (avec une inégalité large) pour tout $n \in \mathbb{N}$, les nombres $2n$ et 3^n. (Prouver cette inégalité)

2. Simplifier ces sommes et produits :

(a) $S_1 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k+1}$.

(b) $S_2 = \sum_{k=0}^{n} a^{2k} \frac{1}{4^{k+1}}$ où a est un réel. (On distinguera deux cas en fonction de la valeur de a et on pourra laisser le résultat final sous forme d'une 'grosse' fraction)

(c) $S_3 = \sum_{k=0}^{2n} (k^3 + 1)$ (On pourra laisser le résultat final comme la somme de deux termes ne dépendant que de n)

(d) $P_1 = \prod_{k=3}^{n+1} k^2$ (On écrira le résultat à l'aide de factorielle)

3. Ecrire un script Python qui demande à l'utilisateur un entier n et calcule la somme S_3.

4. Ecrire un script Python qui demande à l'utilisateur un entier n et calcule le produit P_1.

Exercice 2. Soit $\omega = e^{\frac{2i\pi}{7}}$. On considère $A = \omega + \omega^2 + \omega^4$ et $B = \omega^3 + \omega^5 + \omega^6$

1. Calculer $\frac{1}{\omega}$ en fonction de $\overline{\omega}$.
2. Montrer que pour tout $k \in [\![0, 7]\!]$ on a
$$\omega^k = \overline{\omega}^{7-k}.$$
3. En déduire que $\overline{A} = B$.
4. Montrer que la partie imaginaire de A est strictement positive. (On pourra montrer que $\sin\left(\frac{2\pi}{7}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{7}\right) > 0$.)
5. Montrer que $\sum_{k=0}^{6} \omega^k = 0$. En déduire que $A + B = -1$.
6. Montrer que $AB = 2$.
7. En déduire la valeur exacte de A.

Exercice 3. Soit z, z' deux nombres complexes.

1. Rappeler les valeurs de $A = z\overline{z}$, $B = |z\overline{z}|$, $C = |\overline{z}z'|^2$ en fonction de $|z|$ et $|z'|$.
2. On suppose dans cette question et la suivante que $|z| < 1$ et $|z'| < 1$. Montrer que
$$\overline{z}z' \neq 1$$

3. Montrer que
$$1 - \left|\frac{z-z'}{1-\overline{z}z'}\right|^2 = \frac{(1-|z'|^2)(1-|z|^2)}{|1-\overline{z}z'|^2}$$
4. Soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes vérifiant : $|z_0| < 1, |z_1| < 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$z_{n+2} = \frac{z_n - z_{n+1}}{1-\overline{z_n}z_{n+1}}$$
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|z_n| < 1$ et que $\overline{z_n}z_{n+1} \neq 1$, et donc que $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
On pourra utiliser les deux questions précédentes dans une récurrence double

Problème 1. On se propose dans ce problème de calculer la limite de la suite :
$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+n}$$

1. Etude de la convergence de $(S_n)_{n\geq 1}$.
   (a) Déterminer le sens de variation de $(S_n)_{n\geq 1}$.
   (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n \geq 0$.
   (c) En déduire que $(S_n)_{n\geq 1}$ converge. On note ℓ sa limite.
2. Minoration de la limite
   (a) A l'aide d'un changement de variable montrer que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}$$
   (b) Montrer à l'aide d'une somme téléscopique que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
   $$\sum_{k=n}^{2n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) = \ln\left(\frac{2n+1}{n}\right)$$
   (c) En déduire la limite de $\displaystyle\sum_{k=n}^{2n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$.
   (d) A l'aide d'une étude de fonction, montrer que pour tout $x \geq 0$:
   $$\ln(1+x) \leq x.$$

(e) Montrer à l'aide des questions précédentes que

$$\ell \geq \ln(2).$$

On pourra aussi utiliser le résultat en bas de page [1]

3. Majoration de la limite.

(a) A l'aide d'une étude de fonction, montrer que pour tout $x \geq 0$:

$$x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x)$$

(b) On pose $e_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{2k^2}$. On va montrer que $(e_n)_{n\geq 1}$ tend vers 0.

i. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $e_n \geq 0$.

ii. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $e_n \leq \frac{n+1}{2n^2}$.

iii. Conclure.

(c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$S_n \leq e_n + \sum_{k=n}^{2n} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)$$

(d) En déduire la valeur de ℓ.

1. On rapelle le résultat suivant :
Théorème : Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites. Si

— Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n$.

— Et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admettent des limites.

Alors

$$\lim_{n\to\infty} u_n \leq \lim_{n\to\infty} v_n$$