Correction DS 3

Exercice 1. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On considère le système suivant

$$(S_\lambda) \quad \begin{cases} 2x & +y & & = & \lambda x \\ & y & & = & \lambda y \\ -x & -y & +z & = & \lambda z \end{cases}$$

1. Mettre le système sous forme échelonné.
2. En donner le rang en fonction de λ.
3. Déterminer Σ l'ensemble des réels λ pour lequel ce système n'est pas de Cramer.
4. Pour $\lambda \in \Sigma$, résoudre S_λ
5. Quelle est la solution si $\lambda \notin \Sigma$?

Correction 1.

1. En échangeant les lignes et les colonnes on peut voir que le système est déjà échelonné !

$$(S_\lambda) \iff \begin{cases} (2-\lambda)x & +y & & = & 0 \\ & (1-\lambda)y & & = & 0 \\ -x & -y & +(1-\lambda)z & = & 0 \end{cases}$$

$L_3 \leftarrow L_1, L_2 \leftarrow_3, L_1 \leftarrow L_2$

$$(S_\lambda) \iff \begin{cases} -x & -y & +(1-\lambda)z & = & 0 \\ (2-\lambda)x & +y & & = & 0 \\ & (1-\lambda)y & & = & 0 \end{cases}$$

$C_3 \leftarrow C_1, C_2 \leftarrow C_3, C_1 \leftarrow C_2$

$$\iff \begin{cases} (1-\lambda)z & -x & -y & = & 0 \\ & (2-\lambda)x & +y & = & 0 \\ & & (1-\lambda)y & = & 0 \end{cases}$$

2. Si $(2-\lambda) \neq 0$ et $(1-\lambda) \neq 0$ c'est-à-dire si $\lambda \notin \{1, 2\}$

$$\boxed{\text{Le système est triangulaire de rang 3.}}$$

Si $(2-\lambda) = 0$, c'est-à-dire si $\lambda = 2$ on a :

$$S_2 \iff \begin{cases} -z & -x & -y & = & 0 \\ & & +y & = & 0 \\ & & -y & = & 0 \end{cases}$$

$$S_2 \iff \begin{cases} -z & -x & -y & = & 0 \\ & & +y & = & 0 \end{cases}$$

$$\boxed{\text{Le système est de rang 2.}}$$

Si $(1-\lambda)=0$, c'est-à-dire si $\lambda=1$ on a :

$$S_1 \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rrcl} -x & -y & = & 0 \\ x & +y & = & 0 \\ & 0 & = & 0 \end{array}\right.$$

$$S_1 \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rrcl} -x & -y & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\boxed{\text{Le système est de rang 1.}}$$

3. Le système n'est pas de Cramer, si $\lambda \in \{1,2\}$.
   Si $\lambda=1$ les solutions sont données par

$$\boxed{S_1 = \{(-y,y,z)\,|(y,z)\in\mathbb{R}^2\}}$$

   Si $\lambda=2$ les solutions sont données par

$$\boxed{S_2 = \{(-z,0,z)\,|z\in\mathbb{R}^2\}}$$

4. Si $\lambda \notin \Sigma$, le système est de Cramer, il admet une unique solution. Or il est homogène donc, $(0,0,0)$ est solution, c'est donc la seule :

$$\boxed{S = \{(0,0,0)\}}$$

Exercice 2. On considère pour tout $n\in\mathbb{N}$ l'intégrale

$$I_n = \int_1^e (\ln(x))^n dx$$

1. (a) Démontrer que pour tout $x\in]1,e[$ et pour tout entier naturel $n\in\mathbb{N}$ on a $(\ln(x))^n-(\ln(x))^{n+1}>0$.
   (b) En déduire que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
2. (a) Calculer I_1 à l'aide d'une intégration par parties.
   (b) Démontrer, toujours à l'aide d'une intégration par parties que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $I_{n+1}=e-(n+1)I_n$
3. (a) Démontrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $I_n\geq 0$.
   (b) Démontrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $(n+1)I_n\leq e$.
   (c) En déduire la limite de $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (d) Déterminer la valeur de $nI_n+(I_n+I_{n+1})$ et en déduire la limite de nI_n.

Correction 2.

1. Pour tout $x\in]1,e[$, $0<\ln(x)<1$, donc $\ln(x)^n\ln(x)<\ln(x)^n$. On obtient bien

$$\boxed{\ln(x)^n - \ln(x)^{n+1} > 0}$$

2. En intégrant, par positivité de l'intégrale on a

$$\int_1^e \ln(x)^n - \ln(x)^{n+1} dx > 0$$

$$\boxed{\text{Donc } I_n > I_{n+1} \text{ et la suite est bien décroissante.}}$$

3. vu en cours.

$$\int_1^e \ln(x)dx = [x\ln(x)]_1^e - \int_1^e x\frac{1}{x}dx$$

   Donc

$$\boxed{\int_1^e \ln(x)dx = e - (e-1) = 1}$$

4. On pose $u'(x) = 1$ et $v(x) = (\ln(x))^{n+1}$. On a $u(x) = x$ et $v'(x) = (n+1)\frac{1}{x}(\ln(x))^n$. Et finalement

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= \int_1^e 1(\ln(x))^{n+1}dx \\ &= [x(\ln(x))^{n+1}]_1^e - \int_1^e x(n+1)\frac{1}{x}(\ln(x))^n dx \\ &= e - (n+1)I_n \end{aligned}$$

5. Comme $\ln(x) \geq 0$ pour tout $x \in [1, e]$, $\ln(x)^n \geq 0$.

$$\boxed{\text{Par positivité de l'intérgale, } I_n \text{ est positive.}}$$

6. D'après la question 2b, $(n+1)I_n = e - I_{n+1}$ et d'après la question précédente pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n \geq 0$ donc $e - I_{n+1} \leq e$.

$$\boxed{\text{On a bien } (n+1)I_n \leq e.}$$

7. Les question précédentes montre que

$$0 \leq I_n \leq \frac{e}{n+1}$$

   Comme $\lim_{n\to+\infty} \frac{e}{n+1} = 0$, le théorème des gendarmes assure que

$$\boxed{\text{La suite } (I_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge et sa limite vaut 0.}}$$

8. D'après la question 2b, $I_{n+1} = e - (n+1)I_n$ donc

$$(n+1)I_n + I_{n+1} = e$$

   et finalement $nI_n + (I_n + I_{n+1}) = e$ Comme $\lim I_n = \lim I_{n+1} = 0$ on obtient

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} nI_n = e.}$$

Exercice 3. Le but de cet exercice est de déterminer l'ensemble $\mathcal{S}$ des fonctions f : $]0,+\infty[\to\mathbb{R}$ telles que :

$$f \text{ est dérivable sur }]0,+\infty[\text{ et } \forall t>0,\ f'(t)=f(1/t)$$

On fixe une fonction $f\in\mathcal{S}$ et on définit la fonction g par

$$g(x)=f(e^x)$$

1. Justifier que f est deux fois dérivable sur $]0,+\infty[$ et exprimer sa dérivée seconde en fonction de f.
2. Justifier que g est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et montrer que g est solution de l'équation diffrentielle suivante :

$$y''-y'+y=0 \quad (E)$$

3. Résoudre (E).
4. En déduire que f est de la forme

$$f(t)=A\sqrt{t}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(t)\right)+B\sqrt{t}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(t)\right)$$

   où (A,B) sont deux constantes réelles.
   On appelle $f_1(t)=\sqrt{t}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(t)\right)$ et $f_2(t)=\sqrt{t}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(t)\right)$
5. Calculer les dérivées premières de f_1 et f_2
6. En considérant les cas $t=1$ et $t=e^{\pi/\sqrt{3}}$, montrer que A et B sont solutions de

$$(S)\left\{\begin{array}{rcl} A-B\sqrt{3} & = & 0 \\ A\sqrt{3}-3B & = & 0 \end{array}\right.$$

7. Résoudre (S).
8. Conclure.

Correction 3.

1. Remarquons qu'étant donné que f est dérivable et $t\mapsto\frac{1}{t}$ est aussi dérivable, la fonction f' est dérivable par composée de fonctions dérivables. Ainsi f est dérivable deux fois sur $]0,+\infty[$ et on a

$$\boxed{f''(t)=\frac{-1}{t^2}f'(1/t)=\frac{-1}{t^2}f(t)}$$

2. La fonction $x \mapsto e^x$ est dérivable deux fois sur $\mathbb{R}$ et $exp(\mathbb{R}) =]0, +\infty[$, de nouveau par composition, g est dérivable deux fois sur $\mathbb{R}$.
Calculons les dérivées successives de g en fonction de celles de f :
$$g'(x) = e^x f'(e^x) \quad \text{et} \quad g''(x) = e^x f'(e^x) + e^{2x} f''(e^x)$$
On a donc
$$\begin{aligned} g''(x) - g'(x) + g(x) &= e^x f'(e^x) + e^{2x} f''(e^x) - e^x f'(e^x) + f(e^x) \\ &= e^{2x} f''(e^x) + f(e^x) \end{aligned}$$
On utilise alors la relation vérifiée par f : $f'(x) = f(1/x)$, on a par dérivation $f''(x) = \frac{-1}{x^2} f'(1/x) = \frac{-1}{x^2} f(x)$, d'où
$$f''(e^x) = \frac{-1}{e^{2x}} f(e^x) = -e^{-2x} f(e^x)$$
Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$\begin{aligned} g''(x) - g'(x) + g(x) &= -e^{2x} e^{-2x} f(e^x) + f(e^x) \\ &= 0 \end{aligned}$$
$$\boxed{\text{La fonction } g \text{ est donc solution de l'équation différentielle } g'' - g' + g = 0.}$$

3. Résolvons (E) avec la méthode vue en cours. Le polynôme caractéristique est $X^2 - X + 1$ qui admet comme discriminant $\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$ et donc deux racines complexes : $r_1 = \frac{1-i\sqrt{3}}{2}$ et $r_2 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$. Les solutions de (E) sont donc de la forme
$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{ x \mapsto e^{x/2} \left(A \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} x\right) + B \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} x\right)\right) \mid A, B \in \mathbb{R} \right\}}$$

4. On vient de voir que $f(e^x)$ est de la forme $e^{x/2}(A \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} x\right) + B \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} x\right))$, donc $f(t)$ est de la forme
$$f(t) = A\sqrt{t} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln(t)\right) + B\sqrt{t} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln(t)\right)$$
avec A, B deux constantes réelles. Ceci est bien la forme demandée par l'énoncé, avec
$$f_1(t) = \sqrt{t} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln(t)\right)$$
et
$$f_2(t) = \sqrt{t} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \ln(t)\right)$$

5. Calculons les dérivées des fonctions f_1 et f_2. On a
$$\begin{aligned} f_1'(t) &= \frac{1}{2\sqrt{t}}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(t)\right) - \sqrt{t}\frac{\sqrt{3}}{2t}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(t)\right) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{t}}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(t)\right) - \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{t}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(t)\right) \end{aligned}$$
De même
$$f_2'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(t)\right) + \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{t}}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(t)\right)$$
6. Pour $t = 1$ on obtient d'une part
$$\begin{aligned} f(1) &= A\sqrt{1}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(1)\right) + B\sqrt{1}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(1)\right) \\ &= A \end{aligned}$$
et d'autre part :
$$\begin{aligned} f'(1) &= Af_1'(1) + Bf_2'(1) \\ &= \frac{A}{2} + \frac{B\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$
Comme $f'(1) = f(1/1) = f(1)$, on obtient alors
$$A = \frac{A + B\sqrt{3}}{2}$$
donc $2A = A + B\sqrt{3}$ et finalement
$$\boxed{A - B\sqrt{3} = 0}$$
C'est la première équation du système (S)

Faisons la même chose pour $t = e^{\pi/\sqrt{3}}$. Remarquons tout d'abord que
$$f'(e^{\pi/\sqrt{3}}) = f(1/e^{\pi/\sqrt{3}}) = f(e^{-\pi/\sqrt{3}})$$
Calculons alors les deux membres de cette égalité.
$$\begin{aligned} f(e^{-pi/\sqrt{3}}) &= Ae^{-\pi/2\sqrt{3}}\cos(-\frac{\pi}{2}) + Be^{-\pi/2\sqrt{3}}\sin(-\frac{\pi}{2}) \\ &= -Be^{-\pi/2\sqrt{3}} \end{aligned}$$
et
$$f_1'(e^{\pi/\sqrt{3}}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}e^{-\pi/2\sqrt{3}}$$

$$f_2'(e^{\pi/\sqrt{3}}) = \frac{1}{2}e^{-\pi/2\sqrt{3}}$$

d'où

$$f'(e^{\pi/\sqrt{3}}) = -\frac{A\sqrt{3}}{2}e^{-\pi/2\sqrt{3}} + \frac{B}{2}e^{-\pi/2\sqrt{3}}$$

Finalement on obtient

$$Be^{-\pi/2\sqrt{3}} = -\frac{A\sqrt{3}}{2}e^{-\pi/2\sqrt{3}} + \frac{B}{2}e^{-\pi/2\sqrt{3}}$$

Donc

$$-B = -\frac{A\sqrt{3}}{2} + \frac{B}{2}$$

Ce qui donne alors $-2B = -A\sqrt{3} + B$ et finalement

$$\boxed{-3B + A\sqrt{3} = 0}$$

C'est la deuxième équation du système (S)

7. Le système (S) est équivalent à

$$\left\{\begin{array}{rcl} A - B\sqrt{3} & = & 0 \\ \sqrt{3}(A - \sqrt{3}B) & = & 0 \end{array}\right. \iff A - B\sqrt{3} = 0$$

Le système admet alors une infinité de solutions de la forme

$$\boxed{\mathcal{S} = \{(B\sqrt{3}, B) \mid B \in R\}}$$

8. On en déduit que f est de la forme

$$f(t) = B\sqrt{3}f_1(t) + Bf_2(t)$$

où B est une constante réelle.

Il faut maintenant vérifier que les fonctions de cette forme sont bien solutions de notre problème.

f est bien définie et dérivable sur $]0, +\infty[$ et

$$f'(t) = \frac{B\sqrt{3}}{\sqrt{t}}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(t)\right) - \frac{B}{\sqrt{t}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(t)\right)$$

D'autre part $f(1/t) = B\sqrt{3}f_1(1/t) + Bf_2(1/t)$

Et on a

$$\begin{aligned} f_1(1/t) &= \frac{1}{\sqrt{t}}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(1/t)\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{t}}\cos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(t)\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{t}}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(t)\right) \end{aligned}$$

De même on obtient
$$f_2(1/t) = -\frac{1}{\sqrt{t}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(t)\right)$$
par imparité de la fonction sin

Ainsi
$$f(1/t) = B\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{t}}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(t)\right) - B\frac{1}{\sqrt{t}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(t)\right) = f'(t)$$

Exercice 4. On chercher à modéliser le jeu '421' qui consiste à lancer 3 dés : la personne gagne si les dés forment la combinaison '421' et perd sinon [1]

1. Créer une fonction `lancer` qui modélise le lancer de un dé retourne la valeur du dé.
2. Créer une fonction `Lancer3des` qui modélise le lancer de trois dés retourne la valeur de ces trois dés.
3. Créer une fonction `tri` qui prend en argument 3 nombres (a,b,c) et retourne ces trois nombres dans l'ordre croissant.
   Indication : On pourra comparer successivement les valeurs de a, b puis b, c puis a, c et interchanger leur valeur dans le cas où ils ne sont pas croissant
4. Créer une fonction `Jeu` qui modélise le lancer de 3 dés et retourne 'Gagné' si les dés forment un '421' et 'Perdu' sinon.
5. Créer une fonction `Statistique` qui prend en argument un nombre entier n et simule n parties de '421' et retourne la proportion du nombre de parties gagnantes.
6. Créer une fonction `jeu_jusqua_gagne` qui simule des parties de 421 jusqu'à ce que le joueur gagne et retourne le nombre d'essais nécessairement avant d'avoir obtenu un 421.

Remarque sur l'affectation des valeurs de retour d'une fonction : Si on a une fonction Python ($test()$) qui retourne plusieurs valeurs (y_1, y_2) alors on pourra affecter des variables à ces valeurs en écrivant $a, b = test()$

```
def test():
  a=3+4**2
  b=3+a
  return(a,b)
x,y=test()
print(x)
            -->19
```

Correction 4.

```
from random import randint
def lancer():
  d=randint(1,6)
  return(d)
```

1. Le jeu est un peu plus compliqué que ca, on a le droit de relancer des dès normalment mais pour l'instant on s'en tiendra à cette règle simpliste.

```

def lancer3des():
  d_1=lancer()
  d_2=lancer()
  d_3=lancer()
  return(d_1,d_2,d_3)

def tri(a,b,c):
  if b>a:
    a,b=b,a
  if c>b:
    b,c=c,b
  if c>a:
    a,c=c,a
  return(a,b,c)

def jeu():
  a,b,c=lancer2des()
  a,b,c=tri(a,b,c)
  if a==1 and b==2 and c==4:
    return('421')
  else:
    return('Perdu')

def statistique(n):
  gagne=0
  for i in range(n):
    if jeu()=='421':
      gagne=gagne+1
  return(gagne/n)

def jeu_jusqua_gagne():
  c=0
  while jeu()!='421':
    c=c+1
  return(c)
```