DS 3

Durée 3h00

- Les calculatrices sont <u>interdites</u> durant les cours, TD et *a fortiori* durant les DS de mathématiques.
- Si vous pensez avoir découvert une erreur, indiquez-le clairement sur la copie et justifiez les initiatives que vous êtes amenés à prendre.
- Une grande attention sera apportée à la clarté de la rédaction et à la présentations des solutions. (Inscrivez clairement en titre le numéro de l'exercice, vous pouvez aussi encadrer les réponses finales.)
- Vérifiez vos résultats.
- Le résultat d'une question peut être admis et utilisé pour traiter les questions suivantes en le signalant explicitement sur la copie.

Exercice 1. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On considère le système suivant

$$(S_\lambda) \quad \left\{ \begin{array}{rrrcl} 2x & +y & & = & \lambda x \\ & y & & = & \lambda y \\ -x & -y & +z & = & \lambda z \end{array} \right.$$

1. Mettre le système sous forme échelonné.
2. En donner le rang en fonction de λ.
3. Déterminer Σ l'ensemble des réels λ pour lequel ce système n'est pas de Cramer.
4. Pour $\lambda \in \Sigma$, résoudre S_λ
5. Quelle est la solution si $\lambda \notin \Sigma$?

Exercice 2. On considère pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'intégrale

$$I_n = \int_1^e (\ln(x))^n dx$$

1. (a) Démontrer que pour tout $x \in]1, e[$ et pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$ on a $(\ln(x))^n - (\ln(x))^{n+1} > 0$.
   (b) En déduire que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
2. (a) Calculer I_1 à l'aide d'une intégration par parties.
   (b) Démontrer, toujours à l'aide d'une intégration par parties que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+1} = e - (n+1)I_n$
3. (a) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n \geq 0$.
   (b) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(n+1)I_n \leq e$.
   (c) En déduire la limite de $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (d) Déterminer la valeur de $nI_n + (I_n + I_{n+1})$ et en déduire la limite de nI_n.

Exercice 3. Le but de cet exercice est de déterminer l'ensemble $\mathcal{S}$ des fonctions $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ telles que :

$$f \text{ est dérivable sur }]0, +\infty[\text{ et } \forall t > 0,\ f'(t) = f(1/t)$$

On fixe une fonction $f \in \mathcal{S}$ et on définit la fonction g par

$$g(x) = f(e^x)$$

1. Justifier que f est deux fois dérivable sur $]0, +\infty[$ et exprimer sa dérivée seconde en fonction de f.
2. Justifier que g est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et montrer que g est solution de l'équation diffrentielle suivante :

$$y'' - y' + y = 0 \quad (E)$$

3. Résoudre (E).
4. En déduire que f est de la forme

$$f(t) = A\sqrt{t}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(t)\right) + B\sqrt{t}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(t)\right)$$

   où (A, B) sont deux constantes réelles.
   On appelle $f_1(t) = \sqrt{t}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(t)\right)$ et $f_2(t) = \sqrt{t}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(t)\right)$
5. Calculer les dérivées premières de f_1 et f_2
6. En considérant les cas $t = 1$ et $t = e^{\pi/\sqrt{3}}$, montrer que A et B sont solutions de

$$(S)\left\{\begin{array}{rcl} A - B\sqrt{3} & = & 0 \\ A\sqrt{3} - 3B & = & 0 \end{array}\right.$$

7. Résoudre (S).
8. Conclure.

Exercice 4. On chercher à modéliser le jeu '421' qui consiste à lancer 3 dés : la personne gagne si les dés forment la combinaison '421' et perd sinon [1]

1. Créer une fonction `lancer` qui modélise le lancer de un dé et retourne la valeur du dé.
2. Créer une fonction `Lancer3des` qui modélise le lancer de trois dés et retourne la valeur de ces trois dés.
3. Créer une fonction `tri` qui prend en argument 3 nombres (a,b,c) et retourne ces trois nombres dans l'ordre décroissant.

   Indication : On pourra comparer successivement les valeurs de a, b puis b, c puis a, c et interchanger leur valeur dans le cas où ils ne sont pas décroissant
4. Créer une fonction `Jeu` qui modélise le lancer de 3 dés et retourne 'Gagné' si les dés forment un '421' et 'Perdu' sinon.
5. Créer une fonction `Statistique` qui prend en argument un nombre entier n et simule n parties de '421' et retourne la proportion du nombre de parties gagnantes.
6. Créer une fonction `jeu_jusqua_gagne` qui simule des parties de 421 jusqu'à ce que le joueur gagne et retourne le nombre d'essais nécessairement avant d'avoir obtenu un 421.

Remarque sur l'affectation des valeurs de retour d'une fonction : Si on a une fonction Python ($test(x)$) qui retourne plusieurs valeurs (y_1, y_2) alors on pourra affecter des variables à ces valeurs en écrivant $a, b = test(valeur\, de\, x)$

1. Le jeu est un peu plus compliqué que ca, on a le droit de relancer des dès normalment mais pour l'instant on s'en tiendra à cette règle simpliste.

```
def test(x):
    a=3*x
    b=3-x
    return(a,b)
u,v=test(2) \# affecte a u la valeur de a dans la fonction test(2),
                 \# c'est a dire, 3*2=6
                 \# et  a v la valeur de b c'est a dire, 3-2=1
print(u)
          -->6
print(v)
          -->1
```