Correction DS 4

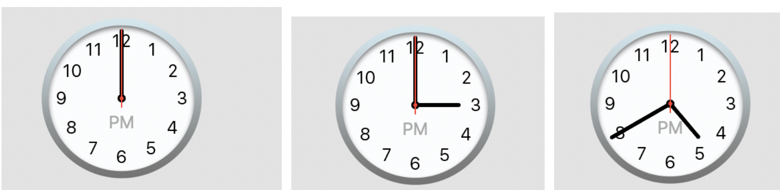
Exercice 1. 1. Donner la définition d'une fonction injective. En donner un exemple et un contre-exemple.

2. Exprimer à l'aide de quantificateurs le fait qu'une fonction f soit majorée sur $\mathbb{R}$.
3. Donner la négation de la proposition suivante : « Si il pleut alors je prends mon parapluie. »
4. Donner la contraposée de l'implication suivante : « Il pleut et il y a du soleil »$\Longrightarrow$ « il y a un arc-en-ciel . »
5. Que vaut la matrice identité de taille 3 ?
6. Donner la définition d'une matrice symétrique. En donner un exemple de taille 3 (qui n'est pas la matrice identité ni la matrice nulle).
7. Donner un exemple d'une matrice de taille 2, telle que $A \neq 0$ mais $A^2 = 0$.

Correction 1.

1. Cf cours
2. $\exists M \in \mathbb{R} \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leq M$
3. 'Il pleut et je ne prends pas mon parapluie'
4. 'Il n'y a pas d'arc-en-ciel' $\Longrightarrow$ ' Il ne pleut pas ou il n'y a pas de soleil'
5. $\mathrm{Id} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
6. Une matrice A est symétrique si $A = A^T$ où A^T désigne la transposée de A. ex $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
7. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ fonctionne.

Exercice 2. On regarde une horloge comme un cercle trigonométrique... Ainsi quand il est midi pile, l'aiguille des heures est à $\frac{\pi}{2}$ et l'aiguille des minutes est aussi à $\frac{\pi}{2}$ (à 2π près évidemment.) Quand il est 15 : 00, l'aiguille des heures est à 0 tandis que celle des minutes est à $\frac{\pi}{2}$.



A quelle place se trouve l'aiguille des heures à 16H00 et à 16h40 ? (on justifiera la réponse proprement pour 16h40)

Correction 2. A 16h00, il est 1h de plus que 15H00. 1H correspond à 1/12 de tour du cercle, donc $\frac{1}{12}2\pi = \frac{\pi}{6}$. Comme le sens trigonométrique est opposé à celui du sens horaire,

$$\boxed{\text{l'aiguille des heures est à } \frac{-\pi}{6} \text{ à 16H00.}}$$

Pour 16h40, on a ajouté $40/60 = 2/3$ d'heures à 16h00. L'aiguille des heures a donc avancé de $\frac{2}{3}\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{9}$, elle est donc à

$$\boxed{-(\tfrac{\pi}{6}\tfrac{\pi}{9}) = -\tfrac{5\pi}{18}}$$

Exercice 3. 1. Résoudre l'inéquation d'inconnue y suivante :

$$\frac{y-3}{2y-3} \leq 2y \quad (E_1)$$

2. En déduire les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'inéquation d'inconnue X :

$$\frac{\sin^2(X)-3}{2\sin^2(X)-3} \leq 2\sin^2(X) \quad (E_2)$$

3. Finalement donner les solutions sur $[0, 2\pi[$ de l'inéquation d'inconnue x :

$$\frac{\sin^2(2x+\frac{\pi}{6})-3}{2\sin^2(2x+\frac{\pi}{6})-3} \leq 2\sin^2(2x+\frac{\pi}{6}) \quad (E_3)$$

Correction 3.

1.

$$\begin{array}{rrl} & \frac{y-3}{2y-3} & \leq 2y \\ \iff & 0 & \leq 2y - \frac{y-3}{2y-3} \\ \iff & 0 & \leq \frac{4y^2-7y+3}{2y-3} \end{array}$$

$4y^2 - 7y + 3$ admet pour racines : $y_0 = 1$ et $y_1 = \frac{3}{4}$, donc

$$\begin{array}{rrl} & \frac{y-3}{2y-3} & \leq 2y \\ \iff & 0 & \leq \frac{4(y-1)(y-\frac{3}{4})}{2(y-\frac{3}{2})} \end{array}$$

Donc les solutions de (E_1) sont

$$\boxed{\mathcal{S}_1 = \left[\tfrac{3}{4}, 1\right] \cup \left]\tfrac{3}{2}, +\infty\right[}$$

2. X est solutions de (E_2) si et seulement si :

$$\sin^2(X) \in \left[\frac{3}{4}, 1\right] \cup \left]\frac{3}{2}, +\infty\right[$$

Comme pour tout $X \in \mathbb{R}$, $\sin(X) \in [-1, 1]$, ceci équivaut à

$$\sin^2(X) \in \left[\frac{3}{4}, 1\right]$$

c'est-à-dire : $\sin^2(X) \geq \frac{3}{4}$, soit $\left(\sin(X) - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\sin(X) + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \geq 0$ On obtient donc

$$\sin(X) \in \left[-1, \frac{-\sqrt{3}}{2},\right] \cup \left[\frac{\sqrt{3}}{4}, 1\right]$$

On a d'une part $\sin(X) \leq \frac{-\sqrt{3}}{2} \iff X \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[\frac{4\pi}{3} + 2k\pi, \frac{5\pi}{3} + 2k\pi\right]$ et

d'autre part $\sin(X) \geq \frac{\sqrt{3}}{2} \iff X \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[\frac{-\pi}{3} + 2k\pi, \frac{2\pi}{3} + 2k\pi\right]$

Ainsi les solutions de (E_2) sont

$$\mathcal{S}_2 = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{2\pi}{3} + 2k\pi\right] \cup \left[\frac{4\pi}{3} + 2k\pi, \frac{5\pi}{3} + 2k\pi\right]$$

En remarquant que $\frac{4\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + \pi$ et $\frac{5\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} + \pi$, on peut simplifier les solutions de la manière suivante :

$$\boxed{\mathcal{S}_2 = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[\frac{\pi}{3}+k\pi, \frac{2\pi}{3}+k\pi\right]}$$

3. x est solution de (E_3) si et seulement si
$$2x+\frac{\pi}{6} \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[\frac{\pi}{3}+k\pi, \frac{2\pi}{3}+k\pi\right]$$
C'est-à-dire
$$2x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}+k\pi, \frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{6}+k\pi\right]$$
On obtient
$$x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2}, \frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}\right]$$
Les solutions sur $[0,2\pi[$ sont donc
$$\boxed{\mathcal{S}_3 = \left[\tfrac{\pi}{12}, \tfrac{\pi}{4}\right] \cup \left[\tfrac{\pi}{12}+\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{4}+\tfrac{\pi}{2}\right] \cup \left[\tfrac{\pi}{12}+\pi, \tfrac{\pi}{2}+\pi\right] \cup \left[\tfrac{\pi}{12}+\tfrac{3\pi}{2}, \tfrac{\pi}{4}+\tfrac{3\pi}{2}\right]}$$

Exercice 4. Soit M la matrice :
$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Résoudre le système $MX = \lambda X$ d'inconnue $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ où λ est un paramètre réel.
2. Calculer $(M-\mathrm{Id})^2$. Donner son rang.
3. Soit $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, et $e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Exprimer Me_1, Me_2 en fonction de e_1, e_2.
4. Montrer qu'il existe $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $Me_3 = \alpha e_2 + \beta e_3$.
5. Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
   Montrer que P est inversible et calculer son inverse.
6. Soit $T = P^{-1}MP$. Calculer T.
7. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
$$T^n = P^{-1}M^nP$$
8. Montrer qu'il existe une matrice diagonale D et une matrice N telles que
$$T = D+N \quad \text{et} \quad ND = DN$$
9. Montrer que $N^2 = 0$
10. Montrer que $T^n = D^n + nND^{n-1}$.
11. En déduire la valeur de M^n.

Correction 4.

1.

$$MX = \lambda X \iff \begin{pmatrix} 2x+y \\ y \\ -x+z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \\ \lambda z \end{pmatrix}$$

$$\left\{\begin{array}{rrrcl} 2x & +y & & = & \lambda x \\ & y & & = & \lambda y \\ -x & & +z & = & \lambda z \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rrrcl} (2-\lambda)x & +y & & = & 0 \\ & (1-\lambda)y & & = & 0 \\ -x & & +(1-\lambda)z & = & 0 \end{array}\right.$$

En échangeant les lignes et les colonnes on peut voir que le système est déjà échelonné. $L_3 \leftarrow L_1, L_2 \leftarrow_3, L_1 \leftarrow L_2$

$$MX = \lambda X \iff \left\{\begin{array}{rrrcl} -x & & +(1-\lambda)z & = & 0 \\ (2-\lambda)x & +y & & = & 0 \\ & (1-\lambda)y & & = & 0 \end{array}\right.$$

$C_3 \leftarrow C_1, C_2 \leftarrow C_3, C_1 \leftarrow C_2$

$$\iff \left\{\begin{array}{rrrcl} (1-\lambda)z & -x & & = & 0 \\ & (2-\lambda)x & +y & = & 0 \\ & & (1-\lambda)y & = & 0 \end{array}\right.$$

Si $\lambda \notin \{1, 2\}$ alors le système est de rang 3, il est donc de Cramer et l'unique solution est

$$\boxed{\mathcal{S} = \{(0, 0, 0)\}}$$

Si $\lambda = 1$, le système est équivalent à

$$\left\{\begin{array}{rrcl} -x & & = & 0 \\ (2-1)x & +y & = & 0 \\ & 0 & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rl} x & = 0 \\ y & = 0 \end{array}\right.$$

Le système est de rang 2. L'ensemble des solutions est

$$\boxed{\mathcal{S} = \{(0, 0, z) \mid z \in \mathbb{R}\}}$$

Si $\lambda = 2$, le système est équivalent à

$$\left\{\begin{array}{rrrcl} (1-2)z & -x & & = & 0 \\ & 0 & +y & = & 0 \\ & & (1-2)y & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rrrl} -z & -x & & = 0 \\ & & y & = 0 \\ & & y & = 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rl} x & = -z \\ y & = 0 \end{array}\right.$$

Le système est de rang 2. L'ensemble des solutions est

$$\boxed{\mathcal{S} = \{(-z, 0, z) \mid z \in \mathbb{R}\}}$$

2. $M - \mathrm{Id} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Donc

$$\boxed{(M - \mathrm{Id})^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}}$$

Le système associé est

$\left\{\begin{array}{rrl} x & +y & = 0 \\ & & 0 = 0 \\ -x & -y & = 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rl} x + y & = 0 \end{array}\right.$ Il est de rang 1. Donc

$$\boxed{(M-\mathrm{Id})^2 \text{ est de rang } 1}$$

3. Le calcul montre que $Me_1 = 2e_1$ et $Me_2 = e_2$
4. Le calcul montre que $Me_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ \\ 1 \end{pmatrix} e_3 - e_2$

   Ainsi on peut prendre

$$\boxed{\alpha = -1 \text{ et } \beta = 1}$$

5. On considère la matrice augmentée : $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

   $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$ donnent

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

   $L_1 \leftarrow L_1 + L_2$ et $L_3 \leftarrow L_3 + L_2$ donne

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

   $L_2 \leftarrow -L_2$ donne

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

   Enfin $L_2 \leftrightarrow L_3$ donne

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\boxed{P \text{ est inversible d'inverse } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}}$$

6. Le calcul donne

$$\boxed{T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

   (sur une copie, le produit intermédiaire MP serait apprécié)
7. (CF ex 6-3 du DM de Noël)

   On pose $P(n)$: "$T^n = P^{-1}M^nP$"

Initialisation $T^1 = T$ et $P^{-1}M^1P = P^{-1}MP = T$ d'après la définition de T. Donc $P(1)$ est vrai.

Hérédité On suppose qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$ soit vraie. On a alors

$$(T)^{n+1} = T^nT$$

et donc par Hypothése de récurrence :

$$\begin{aligned}T^{n+1} &= (P^{-1}M^nP)(P^{-1}MP)\\ &= (P^{-1}M^nPP^{-1}MP)\\ &= (P^{-1}M^n\,\mathrm{Id}\,MP)\\ &= (P^{-1}M^nMP)\\ &= (P^{-1}M^{n+1}P)\end{aligned}$$

Conclusion $P(n)$ est vraie pour tout n.

8. On a $T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

   On pose $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ On a bien $T = D+N$

   et le calcul donne $DN = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = DN$

9. C'est un calcul. La question « normale » devrait être « Calculer N^2 » , mais ne permet pas de faire la question suivante si on n'a pas trouvé la forme de N.

10. Solution 1 : On peut appliquer le binome de Newton à $T = D + N$ car D et N commutent. On a alors

$$T^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N^k D^{n-k}$$

   Comme pour tout $k \geq 2$, $N^2 = 0$ il reste dans cette somme seulement les termes $k = 0$ et $k = 1$. On obtient donc

$$\begin{aligned}T^n &= \binom{n}{0} N^0 D^{n-0} + \binom{n}{1} N^1 D^{n-1}\\ &= D^n + nND^{n-1}\end{aligned}$$

   Solution 2 :
   On pose $P(n)$: ´ $T^n = D^n + nD^{n-1}N$ ˇ

   — Initialisation $T^1 = T$ et $D^1 + 1D^0N = D^1 + \mathrm{Id}\,N = D + N = T$ d'après la définition de D, N. Donc $P(1)$ est vrai.

   — Hérédité On suppose qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$ soit vraie. On a alors

$$(T)^{n+1} = T^nT$$

   et donc par Hypothése de récurrence :

$$\begin{aligned}T^{n+1} &= (D^n + nD^{n-1}N)(D + N)\\ &= D^nD + nD^{n-1}ND + D^nN + nD^{n-1}N^2\end{aligned}$$

   Comme $ND = DN$ on a $D^{n-1}ND = D^{n-1}DN = D^nN$. on a par ailleurs $N^2 = 0$ donc

$$\begin{aligned}T^{n+1} &= D^{n+1} + D^nN + nD^nN\\ &= D^{n+1} + (n+1)D^{(n+1)-1}N\end{aligned}$$

   Ainsi la propriété est héréditaire.

— <u>Conclusion</u> $P(n)$ est vraie pour tout n.

11. On a d'après la question 7

$$M^n = PT^nP^{-1}$$

et d'après la question précédente :

$$T^n = D^n + nD^{n-1}N = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Le calcul donne
$T^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 2^n & 2^n & 0 \\ 1 & 1+n & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ et

$$\boxed{M^n = \begin{pmatrix} 2^n & 2^n - 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2^n + 1 & -2^n + 1 + n & 1 \end{pmatrix}}$$

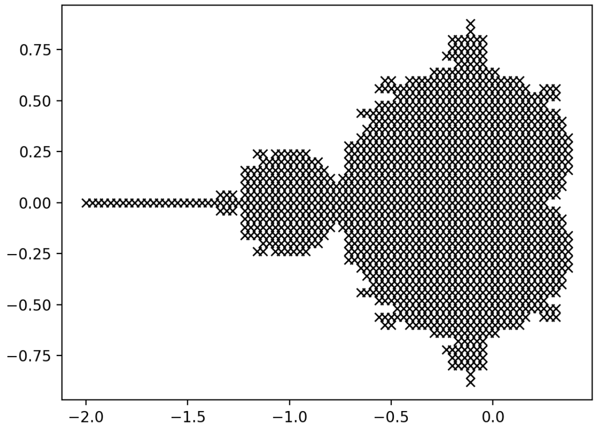
Exercice 5 (Ensemble de Mandelbrot)**.** Soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $z_0 = 0$ et

$$z_{n+1} = z_n^2 + c$$

où $c \in \mathbb{C}$ est un complexe.

Selon la valeur de c, il y a deux possibilités : soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reste bornée, soit son module tends vers l'infini. Le but de ce problème est d'écrire un algorithme qui permet de tracer l'ensemble des c pour lesquels la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reste bornée. Cette ensemble s'appelle l'ensemble de Mandelbrot.

1. Que vaut la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour $c = 0$. Est ce que $c = 0$ appartient à l'ensemble de Mandelbrot ?
2. Que valent les premières valeurs ($n = 0, 1, 2, 3, 4$) de la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour $c = i$. A votre avis est-ce-que $c = i$ appartient à l'ensemble de Mandelbrot ?
3. Même question pour $c = 1 + i$ (pour $n = 0, 1, 2, 3$).
4. Ecrire une fonction Python `suite_z` qui prend en argument un entier $n \in \mathbb{N}$ et un complexe $c \in \mathbb{C}$ et qui retourne la valeur de z_n.
5. On peut montrer que c appartient à l'ensemble de Mandelbrot si et seulement pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|z_n| < 2$. On suppose pour simplifier qu'un nombre c appartient à l'ensemble des Mandelbrot si et seulement si pour tout $n \in [\![0, 100]\!]$, $|z_n| < 2$. Ecrire une fonction verif qui prend un nombre complexe c et retourne `True` si c appartient à l'ensemble de Mandelbrot et `False` sinon.
6. Ecrire une fonction `tracer` qui prend en argument deux réels (x, y) et qui trace le point (x, y) sur un graphique si le point d'affixe $x + iy$ appartient à l'ensemble de Mandelbrot.
7. Ecrire un script python qui teste si les points de coordonnées $\left(\frac{i}{100}, \frac{j}{100}\right)$ pour $i, j \in [\![-100, 100]\!]$ appartiennent à l'ensemble de Mandelbrot et les trace le cas échéant.



Correction 5.

1. Pour $c=0$ la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante égale à 0. 0 appartient donc à l'ensemble de Mandelbrot.
2. Pour $c=i$, $z_0=0$, $z_1=i$, $z_2=i^2+i=-1+i$, $z_3=(-1+i)^2+i=-i$, $z_4=(-i)^2+i=-1+i$. La suite semble périodique et donc le module est borné. Ainsi $c=i$ appartient donc à l'ensemble de Mandelbrot.
3. Pour $c=1+i$: $z_0=0$, $z_1=1+i$, $z_2=(1+i)^2+1+i=1+3i$, $z_3=(1+3i)^2+1+i=-7+7i$, $z_4=(-7+7i)^2+1+i=49(-1+i)^2+1+i=49(-2i)+1+i=1-97i$. Le module semble tendre vers l'infini. $c=1+i$ n'appartient donc pas à l'ensemble de Mandelbrot.

```
def suite_z(n,c):
    z=0
    for i  in range(n):
        z=z**2+c
    return(z)

def verif(c):
    for n in range(101):
        if suite_z(n,c)>2:
            return(False)
    return(True)

import matplotlib.pyplot as plt
def tracer(x,y):
    c=x+y*1j
    if verif(c)==True:
        plt.plot(x,y,'kx')

for x in range(-100,101):
    for y in range(-100,101):
        tracer(x/100,y/100)
plt.show()
```