DS 4

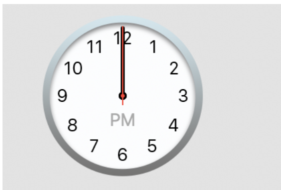
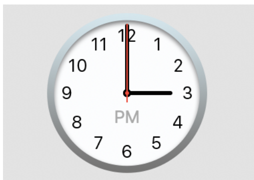
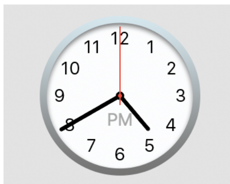
Durée 3h00

- Les calculatrices sont interdites durant les cours, TD et *a fortiori* durant les DS de mathématiques.
- Si vous pensez avoir découvert une erreur, indiquez-le clairement sur la copie et justifiez les initiatives que vous êtes amenés à prendre.
- Une grande attention sera apportée à la clarté de la rédaction et à la présentations des solutions. (Inscrivez clairement en titre le numéro de l'exercice, vous pouvez aussi encadrer les réponses finales.)
- Vérifiez vos résultats.
- Le résultat d'une question peut être admis et utilisé pour traiter les questions suivantes en le signalant explicitement sur la copie.

Exercice 1.

1. Donner la définition d'une fonction injective. En donner un exemple et un contre-exemple.
2. Exprimer à l'aide de quantificateurs le fait qu'une fonction f soit majorée sur $\mathbb{R}$.
3. Donner la négation de la proposition suivante : « Si il pleut alors je prends mon parapluie. »
4. Donner la contraposée de l'implication suivante : « Il pleut et il y a du soleil »$\Longrightarrow$ « il y a un arc-en-ciel . »
5. Que vaut la matrice identité de taille 3 ?
6. Donner la définition d'une matrice symétrique. En donner un exemple de taille 3 (qui n'est pas la matrice identité ni la matrice nulle).
7. Donner un exemple d'une matrice de taille 2, telle que $A \neq 0$ mais $A^2 = 0$.

Exercice 2. On regarde une horloge comme un cercle trigonométrique... Ainsi quand il est midi pile, l'aiguille des heures est à $\frac{\pi}{2}$ et l'aiguille des minutes est aussi à $\frac{\pi}{2}$ (à 2π près évidemment.) Quand il est 15 : 00, l'aiguille des heures est à 0 tandis que celle des minutes est à $\frac{\pi}{2}$.

A quelle place se trouve l'aiguille des heures à 16H00 et à 16h40 ? (on justifiera la réponse proprement pour 16h40)

Exercice 3.

1. Résoudre l'inéquation d'inconnue y suivante :

$$\frac{y-3}{2y-3} \leq 2y \quad (E_1)$$

2. En déduire les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'inéquation d'inconnue X :

$$\frac{\sin^2(X)-3}{2\sin^2(X)-3} \leq 2\sin^2(X) \quad (E_2)$$

3. Finalement donner les solutions sur $[0, 2\pi[$ de l'inéquation d'inconnue x :

$$\frac{\sin^2(2x+\frac{\pi}{6})-3}{2\sin^2(2x+\frac{\pi}{6})-3} \leq 2\sin^2(2x+\frac{\pi}{6}) \quad (E_3)$$

Exercice 4. Soit M la matrice :

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Résoudre le système $MX = \lambda X$ d'inconnue $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ où λ est un paramètre réel.
2. Calculer $(M - \mathrm{Id})^2$. Donner son rang.
3. Soit $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, et $e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Exprimer Me_1, Me_2 en fonction de e_1, e_2.
4. Montrer qu'il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $Me_3 = \alpha e_2 + \beta e_3$.
5. Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
   Montrer que P est inversible et calculer son inverse.
6. Soit $T = P^{-1}MP$. Calculer T.
7. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$T^n = P^{-1}M^nP$$
8. Montrer qu'il existe une matrice diagonale D et une matrice N telles que
$$T = D + N \quad \text{et} \quad ND = DN$$
9. Montrer que $N^2 = 0$
10. En déduire que $T^n = D^n + nND^{n-1}$.
11. Finalement déterminer la valeur de M^n en fonction de n.

Exercice 5 (Ensemble de Mandelbrot)**.** Soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $z_0 = 0$ et

$$z_{n+1} = z_n^2 + c$$

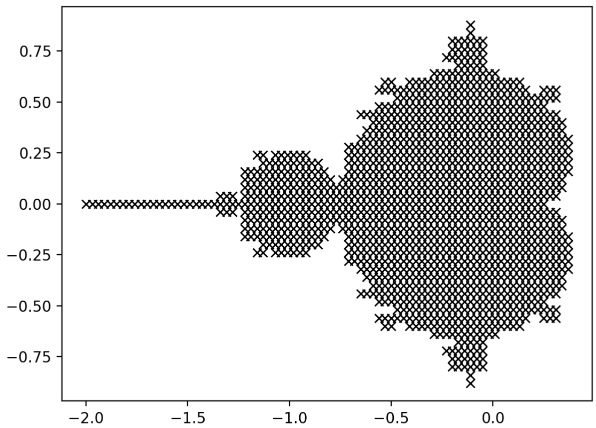
où $c \in \mathbb{C}$ est un complexe.

Selon la valeur de c, il y a deux possibilités : soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reste bornée, soit son module tends vers l'infini. Le but de ce problème est d'écrire un algorithme qui permet de tracer l'ensemble des c pour lesquels la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reste bornée. Cette ensemble s'appelle l'ensemble de Mandelbrot, que l'on note $\mathbb{M}$:

$$\mathbb{M} = \{c \in \mathbb{C} \mid \text{ La suite } (z_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ définie par } z_0 = 0 \text{ et} z_{n+1} = z_n^2 + c \text{ est bornée } \}$$

1. Que vaut la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour $c = 0$. Est ce que $c = 0$ appartient à l'ensemble de Mandelbrot ?
2. Que valent les premières valeurs ($n = 0, 1, 2, 3, 4$) de la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour $c = i$. A votre avis est-ce-que $c = i$ appartient à l'ensemble de Mandelbrot $\mathbb{M}$?

3. Même question pour $c = 1 + i$ (pour $n = 0, 1, 2, 3$).
4. Ecrire une fonction Python `suite_z` qui prend en argument un entier $n \in \mathbb{N}$ et un complexe $c \in \mathbb{C}$ et qui retourne la valeur de z_n.
5. On peut montrer que c appartient à $\mathbb{M}$ si et seulement pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|z_n| < 2$. On suppose pour simplifier qu'un nombre c appartient à $\mathbb{M}$ si et seulement si pour tout $n \in [\![0, 100]\!]$, $|z_n| < 2$. Ecrire une fonction `verif` qui prend en argument un nombre complexe c et retourne `True` si c appartient à l'ensemble de Mandelbrot et `False` sinon.
6. Ecrire une fonction `tracer` qui prend en argument deux réels (x, y) et qui trace le point (x, y) sur un graphique si le point d'affixe $x + iy$ appartient à l'ensemble de Mandelbrot.
7. Ecrire un script python qui teste si les points de coordonnées $\left(\frac{i}{100}, \frac{j}{100}\right)$ pour $i, j \in [\![-100, 100]\!]$ appartiennent à $\mathbb{M}$ et les trace le cas échéant.



On pourra utiliser les bibliothéques `matplolib.pyplot` et `numpy`. On rappelle la définition des fonctions suivantes :

— La fonction `abs(z)` donne la valeur absolue ou le module de z

— On peut obtenir le conjugué d'un nombre complexe z en écrivant `z.conjugate()`

— La fonction `plot` de la bibliothéque `matplolib.pyplot` permet de marquer sur un graphique un point dont on donne les coordonnées (a, b) sous forme de croix grace à `plot(a,b,'x')` où a et b sont des nombres réels,

— La fonction `show` de la bibliothéque `matplolib.pyplot` permet d'afficher le graphique tracé.

— La fonction `linspace(a,b,n)` de la bibliothéqe `numpy` retourne un tableau (ligne) de n nombres espacés linérairement entre a et b.

— La fonction `size(M)` de la bibliothéqe `numpy` retourne la taille du tableau `M`

— La fonction `dot(M,N)` de la bibliothéqe `numpy` retourne le produit matricielle entre M et N.

— La fonction `transpose(M)` de la bibliothéqe `numpy` retourne le tableau transposé de `M`