Correction DS6

Exercice 1. On considère la suite de polynômes $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$T_0 = 1 \quad \text{et} \quad T_1 = X \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\, T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$$

1. (a) Calculer T_2, T_3 et T_4.
   (b) Calculer le degré T_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (c) Calculer le coefficient dominant de T_n.
2. (a) Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$.
   (b) En déduire que $\forall x \in [-1, 1]$, on a $T_n(x) = \cos(n \arccos(x))$.
3. (a) En utilisant la question 2a), déterminer les racines de T_n sur $[-1, 1]$.
   (b) Combien de racines distinctes a-t-on ainsi obtenues ? Que peut on en déduire ?
   (c) Donner la factorisation de T_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Correction 1.

1. (a) $T_2 = 2X^2 - 1$, $T_3 = 4X^3 - 3X$, $T_4 = 8X^4 - 8X^2 + 1$
   (b) Montrons par récurrence que $\deg(T_n) = n$. Comme la suite est une suite récurrente d'ordre 2, on va poser comme proposition de récurrence

   $$P(n) : ´ \ \deg(T_n) = n \text{ ET } \deg(T_{n+1}) = n + 1 \ ˇ$$

   C'est vrai pour $n = 0, 1, 2$ et 3. On suppose qu'il existe un entier $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $P(n_0)$ soit vrai et montrons $P(n_0+1)$. On cherche donc à vérifier $\deg(T_{n_0+1}) = n_0+1$ ET $\deg(T_{n_0+2}) = n_0+2'$. La première égalité est vraie par hypothèse de récurrence. La seconde vient de la relation $T_{n_0+2} = 2XT_{n_0+1} - T_{n_0}$ En effet, par hypothèse de récurrence T_{n_0+1} est de degré $n_0 + 1$ donc $2XT_{n_0+1}$ est de degrés $n_0 + 2$. Comme $\deg(T_{n_0}) = n_0 < n_0 + 2$, on a

   $$\deg(T_{n_0+2}) = \max(\deg(2XT_{n_0+1}), \deg(T_{n_0})) = n_0 + 2$$

   $$\boxed{\text{Ainsi par récurrence pour tout } n \in \mathbb{N},\, \deg(T_n) = n.}$$

   (c) La récurrence précédente montre que le coefficient dominant, notons le c_n vérifie $c_{n+2} = 2c_{n+1}$. Ainsi

   $$\boxed{c_n = 2^n c_0 = 2^n.}$$

2. (a) Montrons le résultat par récurrence. On pose

   $$Q(n) : \text{"}\forall\theta \in \mathbb{R}, T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta) \text{ ET } T_{n+1}(\cos(\theta)) = \cos((n+1)\theta)\text{"}$$

   $Q(0)$ est vraie par définition de T_0 et T_1
   Supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $Q(n)$ soit vrai et montrons $Q(n + 1)$. Il suffit de montrer que $\forall\theta \in \mathbb{R}$

   $$T_{n+2}(\cos(\theta)) = \cos((n+2)\theta)$$

   On a par définition de T_{n+2}

   $$T_{n+2}(\cos(\theta)) = 2\cos(\theta)T_{n+1}(\cos(\theta)) - T_n(\cos(\theta))$$

Par hypothèse de récurrence on a $T_{n+1}(\cos(\theta)) = \cos((n+1)\theta)$ et $T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$ donc

$$T_{n+2}(\cos(\theta)) = 2\cos(\theta)\cos((n+1)\theta) - \cos(n\theta)$$

Les formules trigonométriques donnent :

$$\begin{aligned} 2\cos(\theta)\cos((n+1)\theta) &= \cos(\theta + (n+1)\theta) + \cos(\theta - (n+1)\theta) \\ &= \cos((n+2)\theta) + \cos(-n\theta) \\ &= \cos((n+2)\theta) + \cos(n\theta) \end{aligned}$$

Donc

$$T_{n+2}(\cos(\theta)) = \cos((n+2)\theta) + \cos(n\theta) - \cos(n\theta) = \cos((n+2)\theta)$$

Par récurrence, Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)}$$

(b) Soit $x \in [-1, 1]$ on note $x = \cos(\theta)$, avec $\theta \in [0, \pi]$ on a alors $\theta = \arccos(x)$. D'après la question précédente on a donc pour tout $x \in [-1, 1]$:

$$\boxed{T_n(x) = \cos(n \arccos(x))}$$

3. (a) Pour tout θ tel que $n\theta \equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$, on a $\cos(n\theta) = 0$
Ainsi pour tout θ tel que $\theta \equiv \frac{\pi}{2n}[\frac{\pi}{n}]$,

$$T_n(\cos(\theta)) = 0$$

On obtient ainsi n racines entre $[-1, 1]$ données par

$$\boxed{\{\cos\left(\frac{\pi + 2k\pi}{2n}\right) \mid k \in [0, n-1]\}}$$

(b) On a obtenu n racines. Comme T_n est de degrés n

$$\boxed{\text{On a obtenu toutes les racines,}}$$

ainsi T_n se factorise de la manière suivante :

(c) $$\boxed{T_n(X) = 2^n \prod_{k=0}^{n-1} \left(X - \cos\left(\frac{\pi + 2k\pi}{2n}\right)\right)}$$

Exercice 2. Le but de cet exercice est l'étude de la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ définie par $a_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, a_{n+1} = \frac{a_n(1+a_n)}{1+2a_n}$.

1. Etude de la limite de $(a_n)_{n\geq 1}$.
   (a) Calculer a_2 et a_3.
   (b) Etudier la fonction f définie par $f(x) = \frac{x(x+1)}{1+2x}$.
   (c) Déterminer l'image directe de $]0, 1[$ par f.
   (d) Démontrer que, $\forall n \geqslant 2$, $0 < a_n < 1$.
   (e) Montrer que la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ est décroissante.
   (f) Résoudre l'équation $f(x) = x$ sur $[0, 1]$.

(g) En déduire la limite de $(a_n)_{n\geq 1}$.

2. Un résultat intermédiaire.

Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite croissante, admettant une limite ℓ en $+\infty$ et $(C_n)_{n\geq 1}$ définie par
$$C_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k$$

(a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $C_n \leq u_n$.

(b) Montrer que pour $(C_n)_{n\geq 1}$ est croissante.[1]

(c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $2C_{2n} - C_n \geq u_{n+1}$.

(d) En déduire que $(C_n)_{n\geq 1}$ converge et donner la valeur de sa limite en fonction de celle de $(u_n)_{n\geq 1}$.

3. Etude d'un équivalent de $(a_n)_{n\geq 1}$.

(a) Montrer que $\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n} = \frac{1}{1+a_n}$.

(b) On pose $u_n = \frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n}$. Déterminer la limite de $(u_n)_{n\geq 1}$.

(c) Montrer que $(u_n)_{n\geq 1}$ est croissante.

(d) En posant $C_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$, exprimer C_n en fonction de a_{n+1} et de a_1.

(e) Conclure à l'aide de la question 2.d que $a_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$.

Correction 2.

1. (a) $a_2 = \frac{1(1+1)}{1+2\times 1} = \frac{2}{3}$

$a_3 = \frac{\frac{2}{3}(1+\frac{2}{3})}{1+2\times\frac{2}{3}} = \frac{\frac{10}{9}}{\frac{7}{3}} = \frac{10}{21}$

$$\boxed{a_2 = \tfrac{2}{3} \text{ et } a_3 = \tfrac{10}{21}}$$

(b) f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{\frac{-1}{2}\}$ et $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{\frac{-1}{2}\}$
$$f'(x) = \frac{(2x+1)(1+2x) - x(x+1)2}{(1+2x)^2} = \frac{2x^2+2x+1}{(1+2x)^2}$$

Le discriminant du numérateur vaut $\Delta = 4-8 = -4 < 0$ donc f' est strictement positif sur $\mathbb{R}\setminus\{\frac{-1}{2}\}$ Ainsi f est strictement croissante sur $]-\infty, \frac{-1}{2}[$ et sur $]\frac{-1}{2}, +\infty[$.

(c) $f(0) = 0$ et $f(1) = \frac{2}{3}$, comme f est continue et strictement croissante sur $[0,1]$, le thoérème de la bijection assure que
$$\boxed{f(]0,1[) =]0, \tfrac{2}{3}[}$$

(d) On montre le résultat par récurrence. Soit $P(n)$ la propriété
$$P(n) : "0 < a_n < 1"$$

Initialisation : $P(2)$ est vraie d'après la question 1a)

1. On pourra minorer C_{n+1} en utilisant, après justifications, que $u_{n+1} \geq C_n$

Hérédité : On suppose qu'il existe $n \geq 2$ tel que $P(n)$ soit vraie, on a alors $0 < a_n < 1$. D'après l'étude de f on a alors que $f(a_n) \in 0, \frac{2}{3} \subset]0,1[$, donc

$$a_{n+1} = f(a_n) \in]0,1[$$

Conclusion : La propriété $P(n)$ est héréditaire donc pour tout $n \geq 2$, on a

$$\boxed{0 < a_n < 1}$$

(e) Pour tout $n \in N^*$ on a

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= f(a_n) - a_n \\ &= \frac{a_n(1+a_n)}{1+2a_n} - a_n \\ &= \frac{a_n(1+a_n) - a_n - 2a_n^2}{1+2a_n} \\ &= \frac{-a_n^2}{1+2a_n} \end{aligned}$$

Or on a a prouvé que $a_n \in]0,1[$ donc $1+2a_n > 0$ et $-a_n^2 < 0$ donc $a_{n+1} - a_n < 0$. Ainsi :

$$\boxed{(a_n)_{n\geq 1} \text{ est décroissante}}$$

(f)

$$\begin{aligned} & f(x) = x \\ \iff & \tfrac{x(x+1)}{1+2x} = x \\ \iff & \tfrac{-2x^2}{1+2x} = 0 \\ \iff & x = 0 \end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{\text{La seule solution de } f(x) = x \text{ est } x = 0}$$

(g) La suite $(a_n)_{n\geq 1}$ est décroissante et minorée donc elle converge, notons ℓ sa limite. Par unicité de la limite a_{n+1} converge vers ℓ et par continuité de f, $f(a_n)$ converge vers $f(\ell)$. Ainsi $f(\ell) = \ell$ et finalement d'après la question précédente :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} a_n = 0}$$

2. (a) Par croissance de $(u_n)_{n\geq 1}$ on a pour tout $k \in [\![1, n]\!]$,

$$u_k \leq u_n$$

Donc

$$\sum_{k=1}^{n} u_k \leq \sum_{k=1}^{n} u_n,$$

c'est-à-dire $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k \leq n u_n$. En divisant par $n \in \mathbb{N}^*$ on obtient :

$$\boxed{C_n \leq u_n}$$

(b) $C_{n+1} = \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1} u_k = \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n} u_k + \frac{1}{n+1}u_{n+1}$. Or $C_n \leq u_n \leq u_{n+1}$ où la deuxième inégalité vient de la croissance de $(u_n)_{n\geq 1}$. Donc

$$\begin{aligned} C_{n+1} &\geq \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n} u_k + \frac{1}{n+1}C_n \\ &\geq \frac{1}{n+1}nC_n + \frac{1}{n+1}C_n \\ &\geq \frac{n+1}{n+1}C_n \\ &\geq C_n \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\boxed{(C_n)_{n\geq 1} \text{ est croissante.}}$$

(c)

$$\begin{aligned} 2C_{2n} - C_n &= 2\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{2n} u_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n} u_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=n+1}^{2n} u_k \end{aligned}$$

Or par croissance de $(u_n)_{n\geq 1}$, pour tout $k \geq n+1$, $u_k \geq u_{n+1}$ Donc

$$\sum_{k=n+1}^{2n} u_k \geq \sum_{k=n+1}^{2n} u_{n+1} = nu_{n+1}$$

Finalement

$$\begin{aligned} 2C_{2n} - C_n &\geq \tfrac{1}{n}nu_{n+1} \\ &\geq u_{n+1} \end{aligned}$$

$$\boxed{2C_{2n} - C_n \geq u_{n+1}}$$

(d) D'aprés 2a) $C_n \leq u_n$ et comme $(u_n)_{n\geq 1}$ est croissante $u_n \leq \ell$. Donc $C_n \leq \ell$.
D'après 2b) $(C_n)_{n\geq 1}$ est majorée, donc $(C_n)_{n\geq 1}$ converge en vertu du théorème de la limite monotone. Soit ℓ' sa limite.
D'après 2a)

$$\ell' \leq \ell$$

Et d'après 2c) $2\ell' - \ell' \geq \ell$ d'où

$$\ell' \geq \ell$$

Finalement

$$\boxed{(C_n)_{n\geq 1} \text{ converge et } \lim_{n\to+\infty} C_n = \ell.}$$

3. (a) On a pour tout $n \geq 1$

$$\begin{aligned}\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n} &= \tfrac{1+2a_n}{a_n(1+a_n)} - \tfrac{1}{a_n}\\ &= \tfrac{1+2a_n-(1+a_n)}{a_n(1+a_n)}\\ &= \tfrac{a_n}{a_n(1+a_n)}\\ &= \tfrac{1}{(1+a_n)}\end{aligned}$$

Ce qui est bien l'égalité demandée.

(b) Pour tout $n \geq 1$: $u_n = \frac{1}{1+a_n}$, or $(a_n)_{n\geq 1}$ converge et $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$ donc

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = \tfrac{1}{1+0} = 1}$$

(c) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{1+a_{n+1}} - \dfrac{1}{1+a_n}$ D'où

$$u_{n+1} - u_n = \frac{a_n - a_{n+1}}{(1+a_{n+1})(1+a_n)}$$

Comme $(a_n)_{n\geq 1}$ est décroissante $a_n \geq a_{n+1}$ et comme $a_n \geq 0$ on a bien :

$$u_{n+1} - u_n \geq 0$$

$$\boxed{(u_n)_{n\geq 1} \text{ est croissante}}$$

(d) $C_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{a_{k+1}} - \frac{1}{a_k}\right)$ On reconnait une somme télescopique : on a donc

$$\boxed{C_n = \tfrac{1}{n}\left(\tfrac{1}{a_{n+1}} - \tfrac{1}{a_1}\right)}$$

(e) D'après la question précédente :

$$a_{n+1} = \frac{1}{C_n + \frac{1}{a_1}} = \frac{1}{nC_n + 1}$$

D'après la question $2d)$ Comme $(u_n)_{n\geq 1}$ est croissante et converge vers 1, C_n converge aussi vers 1. On a donc

$$a_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n+1}$$

Au final

$$\boxed{a_n \underset{+\infty}{\sim} \tfrac{1}{n}}$$

Exercice 3. Pour tout réel $t > 0$, on note P_t le polynôme $X^5 + tX - 1 \in \mathbb{R}_5[X]$. Le but de ce problème est d'étudier les racines de P_t en fonction de $t > 0$.

1. On fixe $t > 0$ pour cette question. Prouver que P_t admet une unique racine réelle notée $f(t)$.
2. Montrer que $f(t) \in]0,1[$ pour tout $t > 0$.
3. On considère deux réels, t_1, t_2, tels que $0 < t_1 < t_2$. Montrer que $P_{t_1}(f(t_2)) > 0$
4. En déduire le sens de variations de f.
5. En déduire que f admet des limites finies en 0^+ et en $+\infty$.
6. Déterminer $\lim\limits_{t\to 0^+} f(t)$. [2]

2. Attention, f n'est pas définie en 0, et *a fortiori* pas continue.

7. A l'aide d'un raisonement par l'absurde, montrer que $\lim_{t\to+\infty} f(t) = 0$.
8. En déduire l'équivalent suivant : $f(t) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{t}$.
9. Justifier que f est la bijection réciproque de $g :]0,1[\to]0,+\infty[\; x \mapsto \frac{1-x^5}{x}$
10. (a) Justifier que f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et montrer que pour tout $t > 0$,
$$f'(t) = \frac{f(t)^2}{-1-4f(t)^5}.$$
    (b) En déduire la limite de $f'(t)$ en 0.
    (c) Montrer enfin que $f'(t) \underset{+\infty}{\sim} \frac{-1}{t^2}$

Correction 3.

1. On considère la dérivée de la fonction polynomiale. On a $P_t'(X) = 5X^4 + t$. Ainsi pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $t > 0$ $P_t'(x) \geq 0$.
   - La fonction polynomiale $x \mapsto P_t(x)$ est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
   - $x \mapsto P_t(x)$ est continue en tant que fonction polynomiale.
   - $\lim_{x\to-\infty} P_t(x) = -\infty$, $\lim_{x\to+\infty} P_t(x) = +\infty$ et $0 \in]-\infty,+\infty[$

   Le théorème de la bijection implique
$$\boxed{\text{Il existe un unique réel, notée } f(t) \text{ par l'énoncé, telle que } P_t(f(t)) = 0.}$$
2. Par définition de P_t on a $P_t(0) = -1 < 0$ et $P_t(1) = t > 0$. Le théorème des valeurs intermédiaires montre que
$$\boxed{f(t) \in]0,1[.}$$
3. Soit $t_1 > t_2$, on a $P_{t_1}(X) - P_{t_2}(X) = X^5 + t_1X - 1 - (X^5 + t_2X - 1) = (t_1 - t_2)X$ Donc pour $x > 0$ on a
$$P_{t_1}(x) - P_{t_2}(x) > 0$$
   On applique ce résultat à $f(t_2)$ on obtient
$$P_{t_1}(f(t_2)) - P_{t_2}(f(t_2)) > 0$$
   Par définitionde f, $P_{t_2}(f(t_2)) = 0$, d'où finalement,
$$\boxed{P_{t_1}(f(t_2)) > 0}$$
4. Comme $x \mapsto P_{t_1}(x)$ est une fonction croissante et que $P_{t_1}(f(t_1)) = 0$ on obtient $f(t_2) > f(t_1)$
$$\boxed{\text{Finalement } t \mapsto f(t) \text{ est décroissante.}}$$
5. f est montone et bornée. Le théorème des limites monotones assure que f admet des limites finies en 0^+ et en $+\infty$.
6. Notons ℓ la limite $\lim_{t\to0^+} f(t) = \ell$. Par définition de f on a $f(t)^5 + tf(t) - 1 = 0$. Cette expression admet une limite quand $t \to 0$, on a $\lim_{t\to0^+} f(t)^5 + tf(t) - 1 = \ell^5 - 1$. Par unicité de la limite on a donc $\ell^5 - 1 = 0$, avec comme unique solution réelle :

$$\boxed{\ell = 1.}$$

7. Notons ℓ' la limite $\lim_{t\to+\infty} f(t) = \ell'$. Supposons par l'absurde que cette limite soit non nulle. On a alors $\lim_{t\to+\infty} tf(t) = +\infty$. En passant à la limite dans l'égalité $f(t)^5 + tf(t) - 1 = 0$ on obtient $+\infty = 0$ ce qui est absurde.

$$\boxed{\lim_{t\to+\infty} f(t) = 0.}$$

8. En repartant de l'égalité $f(t)^5 + tf(t) - 1 = 0$ on obtient

$$tf(t) = 1 - f(t)^5$$

Comme $\lim_{t\to+\infty} f(t) = 0$ on a

$$\lim_{t\to+\infty} tf(t) = 1$$

En d'autres termes

$$\boxed{f(t) \sim_{+\infty} \frac{1}{t}}$$

9. f est strictement montone sur $]0, +\infty[$ donc f est une bijection $]0, +\infty[$ sur son image. $\lim\limits_{t\to 0} f(t) = 1$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = 0$. Donc $f(]0, +\infty[) =]0, 1[$ et

$$\boxed{f \text{ est une bijection de }]0, +\infty[\text{ sur }]0, 1[.}$$

Par définition de f on a $f(t)^5 + tf(t) - 1 = 0$ Donc $tf(t) = -f(t)^5 + 1$. Comme $f(t) > 0$, on a :

$$t = \frac{1 - f(t)^5}{f(t)}$$

Soit $g(x) = \frac{1-x^5}{x}$ on a bien $g(f(t)) = t$ Donc $g \circ f = \text{Id}$. Ainsi

$$\boxed{\text{La réciproque de } f \text{ est la fonction } g :]0, 1[\to]0, \infty[.}$$

10. (a) g est dérivable et pour tout $x \in]0, 1[$

$$g'(x) = \frac{-1 - 4x^5}{x^2}.$$

$g'(x)$ est différent de 0 car $-1 - 4x^5$ est différent de 0 sur $]0, 1[$, donc f est dérivable et

$$\boxed{f'(t) = \frac{1}{g'(f(t))} = \frac{f(t)^2}{-1-4f(t)^5}.}$$

(b) $\lim\limits_{t\to 0} f(t) = 1$ donc

$$\boxed{\lim_{t\to 0} f'(t) = \frac{1^2}{-1 - 4 \times 1} = \frac{-1}{5}}$$

(c) En multipliant par t^2 l'égalité obtenue en 10a) on obtient :

$$t^2 f'(t) = \frac{(tf(t))^2}{-1 - 4f(t)^5}.$$

Comme $\lim\limits_{t\to\infty} tf(t) = 1$ et $\lim\limits_{t\to\infty} f(t) = 0$ en passant à la limite dans l'égalité précédente on obtient :

$$\lim_{t\to\infty} t^2 f'(t) = \frac{1}{-1} = -1$$

En d'autres termes :

$$\boxed{f'(t) \underset{+\infty}{\sim} \frac{-1}{t^2}}$$

Exercice 4. On reprend les notations de l'exercice 2 :

1. Créer une fonction Python qui prend en argument un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et retourne la valeur de a_n.
2. Créer une fonction Python qui prend en argument un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et retourne la valeur de C_n comme définie dans la question 3d)

   On reprend les notations de l'exercice 3 :
3. A l'aide de la méthode de la dichotomie, créer une fonction Python qui prend en argument un réel $t > 0$ et retourne la valeur de $f(t)$ à 10^{-3} prés.
4. Ecrire un script Python qui permet de tracer la fonction f sur $[0, 1]$.

Rappels des commandes Python On considère que le module numpy est importé via import numpy as np. Dans le tableau, les variables a et b sont des réels et N est un entier.

On considère que le module matplotlib. pyplot, qui permet de tracer des graphiques, est importé via import matplotlib. pyplot as plt. Les variables X et Y sont ici deux listes de réels, de même longueur.

Python	Interprétation
np. linspace (a, b, N)	Renvoie un tableau à une dimension contenant N valeurs équiréparties dans $[a, b]$; ces valeurs sont les $t_k = a + \frac{b-a}{N-1}k$ pour $k \in [\![0, N-1]\!]$.
plt.plot (X,Y)	Place les points dont les abscisses sont contenues dans X et les ordonnées dans Y et les relie entre eux par des segments. Si cette fonction n'est pas suivie de plt.show(), le graphique n'est pas affiché.
plt.grid()	Dessine en arrière plan du graphique un quadrillage.
plt.show()	Affiche le(s) tracé(s) précédemment créé(s) par plt.plot