# DS 6

## Durée 3h00

- Les calculatrices sont interdites durant les cours, TD et *a fortiori* durant les DS de mathématiques.
- Si vous pensez avoir découvert une erreur, indiquez-le clairement sur la copie et justifiez les initiatives que vous êtes amenés à prendre.
- Une grande attention sera apportée à la clarté de la rédaction et à la présentations des solutions. (Inscrivez clairement en titre le numéro de l'exercice, vous pouvez aussi encadrer les réponses finales.)
- Vérifiez vos résultats.
- Le résultat d'une question peut être admis et utilisé pour traiter les questions suivantes en le signalant explicitement sur la copie.

**Exercice 1.** On considère la suite de polynômes $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$T_0 = 1 \quad \text{et} \quad T_1 = X \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\, T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$$

1. (a) Calculer $T_2$, $T_3$ et $T_4$.
   (b) Calculer le degré $T_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (c) Calculer le coefficient dominant de $T_n$.
2. (a) Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$.
   (b) En déduire que $\forall x \in [-1, 1]$, on a $T_n(x) = \cos(n \arccos(x))$.
3. (a) En utilisant la question 2a), déterminer les racines de $T_n$ sur $[-1, 1]$.
   (b) Combien de racines distinctes a-t-on ainsi obtenues ? Que peut on en déduire ?
   (c) Donner la factorisation de $T_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

**Exercice 2.** Le but de cet exercice est l'étude de la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ définie par $a_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, a_{n+1} = \frac{a_n(1+a_n)}{1+2a_n}$.

1. Etude de la limite de $(a_n)_{n\geq 1}$.
   (a) Calculer $a_2$ et $a_3$.
   (b) Etudier la fonction $f$ définie par $f(x) = \frac{x(x+1)}{1+2x}$.
   (c) Déterminer l'image directe de $]0, 1[$ par $f$.
   (d) Démontrer que, $\forall n \geqslant 2$, $0 < a_n < 1$.
   (e) Montrer que la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ est décroissante.
   (f) Résoudre l'équation $f(x) = x$ sur $[0, 1]$.
   (g) En déduire la limite de $(a_n)_{n\geq 1}$.
2. Un résultat intermédiaire.
   Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite croissante, admettant une limite $\ell$ en $+\infty$ et $(C_n)_{n\geq 1}$ définie par
   $$C_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k$$
   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $C_n \leq u_n$.
   (b) Montrer que pour $(C_n)_{n\geq 1}$ est croissante. [1]
   (c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $2C_{2n} - C_n \geq u_{n+1}$.
   (d) En déduire que $(C_n)_{n\geq 1}$ converge et donner la valeur de sa limite en fonction de celle de $(u_n)_{n\geq 1}$.
3. Etude d'un équivalent de $(a_n)_{n\geq 1}$.
   (a) Montrer que $\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n} = \frac{1}{1+a_n}$.
   (b) On pose $u_n = \frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n}$. Déterminer la limite de $(u_n)_{n\geq 1}$.
   (c) Montrer que $(u_n)_{n\geq 1}$ est croissante.
   (d) En posant $C_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$, exprimer $C_n$ en fonction de $a_{n+1}$ et de $a_1$.
   (e) Conclure à l'aide de la question 2.d que $a_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$.

1. On pourra minorer $C_{n+1}$ en utilisant, après justifications, que $u_{n+1} \geq C_n$

**Exercice 3.** Pour tout réel $t > 0$, on note $P_t$ le polynôme $X^5 + tX - 1 \in \mathbb{R}_5[X]$. Le but de ce problème est d'étudier les racines de $P_t$ en fonction de $t > 0$.

1. On fixe $t > 0$ pour cette question. Prouver que $P_t$ admet une unique racine réelle notée $f(t)$.
2. Montrer que $f(t) \in ]0, 1[$ pour tout $t > 0$.
3. On considère deux réels, $t_1, t_2$, tels que $0 < t_1 < t_2$. Montrer que $P_{t_1}(f(t_2)) > 0$
4. En déduire le sens de variations de $f$.
5. En déduire que $f$ admet des limites finies en $0^+$ et en $+\infty$.
6. Déterminer $\lim\limits_{t\to 0^+} f(t)$. [2]
7. A l'aide d'un raisonement par l'absurde, montrer que $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = 0$.
8. En déduire l'équivalent suivant : $f(t) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t}$.
9. Justifier que $f$ est la bijection réciproque de $g : ]0, 1[ \to ]0, +\infty[ \; x \mapsto \dfrac{1 - x^5}{x}$
10. (a) Justifier que $f$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et montrer que pour tout $t > 0$,
$$f'(t) = \frac{f(t)^2}{-1 - 4f(t)^5}.$$
    (b) En déduire la limite de $f'(t)$ en 0.
    (c) Montrer enfin que $f'(t) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{-1}{t^2}$

**Exercice 4.** On reprend les notations de l'exercice 2 :

1. Créer une fonction Python qui prend en argument un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et retourne la valeur de $a_n$.
2. Créer une fonction Python qui prend en argument un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et retourne la valeur de $C_n$ comme définie dans la question 3d)

   On reprend les notations de l'exercice 3 :

3. A l'aide de la méthode de la dichotomie, créer une fonction Python qui prend en argument un réel $t > 0$ et retourne la valeur de $f(t)$ à $10^{-3}$ prés.
4. Ecrire un script Python qui permet de tracer la fonction $f$ sur $[0, 1]$.

**Rappels des commandes Python** On considère que le module numpy est importé via import numpy as np. Dans le tableau, les variables a et b sont des réels et N est un entier.

On considère que le module matplotlib. pyplot, qui permet de tracer des graphiques, est importé via import matplotlib. pyplot as plt. Les variables X et Y sont ici deux listes de réels, de même longueur.

2. Attention, $f$ n'est pas définie en 0, et *a fortiori* pas continue.

| Python | Interprétation |
|---|---|
| np. linspace (a, b, N) | Renvoie un tableau à une dimension contenant $N$ valeurs équiréparties dans $[a, b]$; ces valeurs sont les $t_k = a + \frac{b-a}{N-1}k$ pour $k \in [\![0, N-1]\!]$. |
| plt.plot (X,Y) | Place les points dont les abscisses sont contenues dans X et les ordonnées dans Y et les relie entre eux par des segments. Si cette fonction n'est pas suivie de plt.show(), le graphique n'est pas affiché. |
| plt.grid() | Dessine en arrière plan du graphique un quadrillage. |
| plt.show() | Affiche le(s) tracé(s) précédemment créé(s) par plt.plot |