DS1

3h00

- Les calculatrices sont interdites durant les cours, TD et *a fortiori* durant les DS de mathématiques.
- Si vous pensez avoir découvert une erreur, indiquez-le clairement sur la copie et justifiez les initiatives que vous êtes amené·e ·s à prendre.
- Une grande attention sera apportée à la clarté de la rédaction et à la présentations des solutions. (Inscrivez clairement en titre le numéro de l'exercice, vous pouvez aussi encadrer les réponses finales.)
- Vérifiez vos résultats.
- Le résultat d'une question peut être admis et utilisé pour traiter les questions suivantes en le signalant explicitement sur la copie.

Exercice 1. Donner la valeur des sommes et produits suivants :

$$S_1 = \sum_{k=1}^{5} k, \quad S_2 = \sum_{k=0}^{5} 2, \quad S_3 = \sum_{k=0}^{5} 2k.$$

$$P_1 = \prod_{k=1}^{5} (-1)^k, \quad P_2 = \prod_{k=0}^{5} 2, \quad P_3 = \prod_{k=0}^{5} 2k.$$

Exercice 2. On considère l'équation suivante d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$\left\lfloor 2x - \sqrt{5x-1} \right\rfloor = 0 \qquad (E)$$

1. Déterminer le domaine de définition de (E).
2. Dire (en justifiant !) si les réels suivants sont solutions ou non de (E)

$$x_1 = \frac{1}{5},\ x_2 = \frac{1}{2},\ x_3 = 1,\ x_4 = 12$$

3. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, rappeler un encadrement de la partie entière de a en fonction de a.
4. Montrer que résoudre (E) est équivalent à résoudre le système :

$$\begin{cases} \sqrt{5x-1} > & 2x-1 \qquad (E_1) \\ \sqrt{5x-1} \leq & 2x \qquad (E_2) \end{cases}$$

5. Résoudre les deux inéquations obtenues à la question précédente.
6. Résoudre (E).

Exercice 3. On souhaite résoudre l'inéquation suivante

$$I(a) \quad : \quad ax^2 - 2a^2x + ax - x + 2a - 1 \geq 0$$

d'inconnue x et de paramètre $a \in \mathbb{R}$.

1. A quelle.s condition.s sur a cette inéquation n'est-elle pas de degré 2 ? La résoudre pour la.les valeur.s correspondante.s

   Dans toute la suite de l'exercice nous supposerons que a est tel que l'inéquation est de degré 2.
2. Montrer alors que le discriminant de $ax^2 - 2a^2x + ax - x + 2a - 1$ en tant que polynome du second degre en x, vaut

$$\Delta(a) = 4a^4 - 4a^3 - 3a^2 + 2a + 1$$

3. Montrer que $\Delta(a) = (a-1)^2(2a+1)^2$
4. (a) Soit $\mathcal{M}$ l'ensemble des solutions de $\Delta(a) = 0$. Déterminer $\mathcal{M}$

   (b) Résoudre $I(a)$ pour $a \in \mathcal{M}$.

   On suppose désormais que $a \notin \mathcal{M}$.
5. (a) Justifier que $\Delta(a) > 0$ et exprimer $\sqrt{\Delta(a)}$ à l'aide de valeur absolue.

   (b) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\{|x|, -|x|\} = \{x, -x\}$$

   (c) En déduire que l'ensemble des racines de $ax^2 - 2a^2x + ax - x + 2a - 1$ est

$$R = \left\{ \frac{1}{a},\ 2a - 1 \right\}$$

   On note

$$r_1(a) = \frac{1}{a} \quad \text{et} \quad r_2(a) = 2a - 1$$

6. Résoudre $r_1(a) \geq r_2(a)$.
7. Conclure en donnant les solutions de $I(a)$ en fonction de a.

Exercice 4. On souhaite résoudre l'équation suivante :

$$(E) \quad : \quad e^{2x} + 3e^x - 4e^{-x} \geq 0$$

d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

1. On pose $X = e^x$. Montrer que x est solution de (E) si et seulement si X est strictement positif et solution de
$$(E') \quad : \quad X^3 + 3X^2 - 4 \geq 0$$
2. Montrer que 1 est racine de $X^3 + 3X^2 - 4$.
3. Résoudre (E')
4. En déduire les solutions de (E)

INFORMATIQUE

Exercice 5. Écrire une fonction `Benefice(pv,pc)` qui prend en argument le prix de vente `pv` et le prix de construction `pc` d'un objet et qui renvoie :

- `Profit =` le profit réalisé si le prix de vente est supérieur strictement au prix de construction ;
- `Perte =` la perte réalisée si le prix de vente est inférieur strictement au prix de construction ;
- `Ni profit ni perte` quand on n'est dans aucun des cas précédent.

Par exemple, `Benefice(280,320)` renvoie `Perte = 40`.

Exercice 6.

1. Écrire une fonction Python `f` qui prend en argument un flottant `x` et retourne la valeur de $x + \sqrt{x^2 - 2x}$ si cette valeur est bien définie et 'erreur' sinon.

2. On dispose de la fonction suivante où `x`, `y` sont deux flottants.

```
def mystere(x,y) :
    if f(x)=='erreur' or f(y)=='erreur' :
        return 'Probleme de variable'
    elif f(x) <= f(y) :
        return x
    else :
        return y
```

Qu'affiche la console avec les instructions suivantes
   (a) `print(mystere(-2,5))`
   (b) `print(mystere(3,-3))`
   (c) `print(mystere(1,3))`

3. Écrire une fonction `argmin3(x, y, z)` qui renvoie `'Probleme de variable'` si la fonction n'est pas définie en l'une des variables et sinon renvoie parmi les trois valeurs `x`, `y` et `z`, celle en laquelle `f` est minimale.