Correction DS 2

Exercice 1. On considére l'inéquation :

$$(I) : \frac{2\sin(x) - \sqrt{2}}{\sin(x)(2\cos(x) - 1)} > 0$$

1. Déterminer D : l'ensemble de définition de (I).
2. Résoudre (I) sur $[0, 2\pi[\cap D$. On pourra faire un tableau de signes.

Correction 1.

1. (I) est définie pour tout x tel que

$$\sin(x)(2\cos(x) - 1) \neq 0$$

Résolvons donc

$$\sin(x) = 0 \quad \text{et} \quad 2\cos(x) - 1 = 0$$

L'ensemble des solutions de la première équation est $\mathcal{S}_1 = \{0 + 2k\pi, \pi + 2k\pi \,|\, k \in \mathbb{Z}\}$ qui se simplifie en

$$\mathcal{S}_1 = \{k\pi \,|\, k \in \mathbb{Z}\}$$

La deuxième équation s'écrit

$$\cos(x) = \frac{1}{2}$$

dont les solutions sont

$$\mathcal{S}_2 = \{\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{-\pi}{3} + 2k\pi \,|\, k \in \mathbb{Z}\}$$

Finalement on obtient que (I) est définie sur

$$\boxed{D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, \tfrac{\pi}{3} + 2k\pi, \tfrac{-\pi}{3} + 2k\pi \,|\, k \in \mathbb{Z}\}}$$

2. Sur $[0, 2\pi[$ on obtient

$$\sin(x) \geq 0 \iff x \in [0, \pi]$$

$$(2\cos(x) - 1) \geq 0 \iff \cos(x) \geq \frac{1}{2} \iff x \in [0, \frac{\pi}{3}] \cup [\frac{5\pi}{3}, 2\pi[$$

$$2\sin(x) - \sqrt{2} \geq 0 \iff \sin(x) \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \iff x \in [\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$$

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{3\pi}{4}$		π		$\frac{5\pi}{3}$		2π
$2\sin(x) - \sqrt{2}$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$		$-$		$-$	
$\sin(x)$	$\Vert$	$+$		$+$		$+$		$+$	$\Vert$	$-$		$-$	
$2\cos(x) - 1$		$+$		$+$	$\Vert$	$-$		$-$		$-$	$\Vert$	$+$	
$\frac{2\sin(x) - \sqrt{2}}{\sin(x)(2\cos(x) - 1)}$	$\Vert$	$-$		$+$	$\Vert$	$-$		$+$	$\Vert$	$-$	$\Vert$	$+$	

$$\boxed{\mathcal{S} =]\tfrac{\pi}{4}, \tfrac{\pi}{3}[\cup]\tfrac{3\pi}{4}, \pi[\cup]\tfrac{5\pi}{3}, 2\pi[}$$

Exercice 2. On définit deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ par

$$u_0 = 3 \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{2u_n}{u_n+1} \quad v_n = \frac{2u_n - 1}{-u_n+1}$$

1. INFO Ecrire une fonction Python qui prend en argument un entier n et retourne la valeur de u_n.
2. Résoudre $\dfrac{2x}{x+1} > 1$
3. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 1$ et en déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont bien définies.
4. Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie pour tout $n \in \mathbb{N}$
$$v_{n+1} = 2v_n + 1$$
5. Donner l'expression de v_n en fonction de n.
6. En déduire l'expression de u_n en fonction de n.

Correction 2.

1.
```python
def suite_u(n):
    u=3
    for i in range(1,n+1):
        u=2*u/(u+1)
    return(u)
```

2.
$$\begin{aligned}\frac{2x}{x+1} &> 1\\ \frac{2x}{x+1} - 1 &> 0\\ \frac{x-1}{x+1} &> 0\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est donc

$$\boxed{\mathcal{S} =]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[}$$

3. Soit $P(n)$ la propriété $P(n) :=$ "$u_n > 1$". Remarquons tout d'abord que si on prouve $P(n)$ alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont bien définies car $P(n)$ implique que $u_n \neq -1$ et $-u_n \neq +1$.
On va prouver $P(n)$ par récurrence.

Initialisation : $P(0)$ est vraie d'après l'énoncé, en effet $u_0 = 3 > 1$

Hérédité : Supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$, tel que $P(n)$ soit vraie. On a alors $u_n > 1$. D'après la question précédente, on a donc que $\frac{2u_n}{u_n+1} > 1$ car $u_n \in \mathcal{S}$
Ainsi
$$u_{n+1} > 1$$
ce qui prouve $P(n+1)$.

Conclusion : $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$

4. On a d'une part

$$\begin{aligned}v_{n+1} &= \frac{2u_{n+1} - 1}{-u_{n+1} + 1}\\ &= \frac{2\frac{2u_n}{u_n+1} - 1}{-\frac{2u_n}{u_n+1} + 1}\\ &= \frac{4u_n - u_n - 1}{-2u_n + u_n + 1}\\ &= \frac{3u_n - 1}{-u_n + u_n + 1}\end{aligned}$$

et d'autre part

$$\begin{aligned}
2v_n + 1 &= 2\frac{2u_n - 1}{-u_n + 1} + 1 \\
&= \frac{4u_n - 2 - u_n + 1}{-u_n + 1} \\
&= \frac{3u_n - 1}{-u_n + 1}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On obtient bien } v_{n+1} = 2v_n + 1}$$

5. On reconnait une suite arithmético-géométrique. On utilise donc une suite auxiliaire :

$$w_n = v_n - \alpha$$

où $\alpha \in \mathbb{R}$ est un réel à déterminer afin que $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit géométrique.

$$\begin{aligned}
w_{n+1} &= v_{n+1} - \alpha \\
&= 2v_n + 1 - \alpha \\
&= 2(w_n + \alpha) + 1 - \alpha \\
&= 2w_n + \alpha + 1
\end{aligned}$$

On choisit donc $\alpha = -1$ et alors $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison 2. Le cours donne $w_n = w_0 2^n$. Ce qui donne pour

$$v_n = (v_0 - \alpha)2^n + \alpha$$

Il reste à calculer v_0, avec la formule définissant v_n :

$$v_0 = \frac{2u_0 - 1}{-u_0 + 1} = -\frac{5}{2}$$

$$\boxed{v_n = \frac{-3}{2}2^n - 1}$$

6. Enfin la formule définissant v_n permet aussi de retrouver u_n en fonction de v_n :

$$\begin{aligned}
&v_n = \frac{2u_n - 1}{-u_n + 1} \\
\iff &v_n(-u_n + 1) = 2u_n - 1 \\
\iff &-v_n u_n + v_n = 2u_n - 1 \\
\iff &u_n(-v_n - 2) = -v_n - 1 \\
\iff &u_n = \frac{-v_n - 1}{-v_n - 2} \\
\iff &u_n = \frac{v_n + 1}{v_n + 2}
\end{aligned}$$

Ainsi

$$u_n = \frac{\frac{-3}{2}2^n + 1 - 1}{\frac{-3}{2}2^n - 1 + 2}$$

Apres simplifications :

$$\boxed{u_n = \frac{3 \times 2^{n-1}}{3 \times 2^{n-1} - 1}}$$

Exercice 3. ⚠ constante pourries ⚠ On définit deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$u_0 = 3 \quad v_0 = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 3u_n + v_n \quad \text{et} \quad v_{n+1} = 2u_n + 3v_n.$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$
$$u_{n+2} = 6u_{n+1} - 7u_n$$
2. En déduire la valeur de u_n en fonction de n.

Correction 3.

1. Avec la definition de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on obtient bien l'égalité demandée :
$$\begin{aligned} u_{n+2} &= 3u_{n+1} + v_{n+1} \\ &= 3u_{n+1} + 2u_n + 3v_n \\ &= 3u_{n+1} + 2u_n + 3(u_{n+1} - 3u_n) \\ &= 6u_{n+1} - 7u_n \end{aligned}$$
2. On reconnait une suite récurrente linéaire d'ordre 2, de polynôme caractéristique : $X^2 - 6X + 7$ Ce polynome admet deux racines réelles :
$$r_1 = \frac{6+\sqrt{8}}{2} \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{6-\sqrt{8}}{2}$$
$$r_1 = 3+\sqrt{2} \quad \text{et} \quad r_2 = 3-\sqrt{2}$$
Le cours nous dit qu'il existe $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout n on a :
$$u_n = Ar_1^n + Br_2^n$$
Il suffit maintenant de déterminer A et B à l'aide des valeurs de u_0 et u_1. u_0 est donné dans l'énoncé et u_1 se calcule facilement avec la relation définissant u_n :
$$u_1 = 3u_0 + v_0 = 10$$
On obtient alors le systeme :
$$\left\{\begin{array}{ccc} A+B & = & u_0 \\ Ar_1 + Br_2 & = & u_1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ccc} A & = & 3-B \\ (3-B)r_1 + Br_2 & = & 10 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ccc} A & = & 3-B \\ B(r_2 - r_1) & = & 10 - 3r_1 \end{array}\right.$$
$r_2 - r_1 = -2\sqrt{2}$ et $10 - 3r_1 = 1 - 3\sqrt{2}$
On a donc :
$$\left\{\begin{array}{ccc} A & = & 3-B \\ B & = & \frac{-1+3\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} \end{array}\right.$$
et $3 - \frac{-1+3\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{1+3\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}$
Finalement on obtient
$$u_n = \frac{1+3\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}(3+\sqrt{2})^n + \frac{-1+3\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}(3-\sqrt{2})^n$$

Exercice 4. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $0 < a < b$. On pose $u_0 = a, v_0 = b$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}, \quad v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}.$$

1. INFO Ecrire une fonction Python qui prend en argument un entier n et deux flottants (a, b) et retourne la valeur de u_n.
2. Montrer que pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}_+)^2$ on a
$$\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$$
3. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq v_n$.

4. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et décroissante.
5. Montrer que pour tout $(x,y)\in(\mathbb{R}_+)^2$ tel que $x\geq y>0$ on a
$$\frac{x+y}{2}-\sqrt{xy}\leq\frac{1}{2}(x-y)$$
6. Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N},\ v_n-u_n\leq\frac{1}{2^n}(v_0-u_0)$.
7. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers la même limite.
8. INFO On note ℓ la limite commune des deux suites. Ecrire une fonction Python qui prend en argument un flottant `eps` et retourne la valeur de ℓ à `eps` prés.

Correction 4.

1.
```
from math import sqrt
def suite_u(n,a,b):
  u=a
  v=b
  for i in range(n):
    u,v=sqrt(u*v), (u+v)/2 #affectation simultanee
  return(u)
```

2. On va procéder par équivalence :
$$\begin{aligned}
&\sqrt{xy}\leq\frac{x+y}{2}\\
\Longleftrightarrow\ & xy\leq\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 \quad \text{car} x+y>0\\
\Longleftrightarrow\ & xy\leq\frac{x^2+y^2+2xy}{4}\\
\Longleftrightarrow\ & 4xy\leq x^2+y^2+2xy\\
\Longleftrightarrow\ & 0\leq x^2+y^2-2xy\\
\Longleftrightarrow\ & 0\leq(x-y)^2
\end{aligned}$$
Cette dernière inégalité étant vérifiée pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ et comme on a procédé par équivalence on a bien pour tout $(x,y)\in(\mathbb{R}_+)^2$
$$\boxed{\sqrt{xy}\leq\frac{x+y}{2}}$$

3. Montrons par récurrence la propriété $\mathcal{P}(n)$ définie pour tout n par : « $0\leq u_n\leq v_n$ ». **Initialisation :** Pour $n=0$, la propriété est vraie, d'après l'hypothèse faite dans l'énoncé $0<a<b$.
Hérédité :
Soit $n\geq 0$ fixé. On suppose la propriété vraie à l'ordre n. Montrons qu'alors $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. On a $u_{n+1}=\sqrt{u_nv_n}$ qui est bien défini car u_n et v_n sont positifs par hypothèse de récurrence. Cette expression assure aussi que u_{n+1} est positif.
De plus,
$$\begin{aligned}
v_{n+1}-u_{n+1}&=\frac{u_n+v_n}{2}-\sqrt{u_nv_n} && \text{Par définition.}\\
&\geq 0 && \text{d'après la question précédente.}
\end{aligned}$$
Ainsi $v_{n+1}\geq u_{n+1}$ La propriété $\mathcal{P}$ est donc vraie au rang $n+1$.
Conclusion :
Il résulte du principe de récurrence que pour tout $n\geq 0$:
$$\boxed{0\leq u_n\leq v_n}$$

4. On a $u_{n+1} - u_n = \sqrt{u_n v_n} - u_n = \sqrt{u_n}(\sqrt{v_n} - \sqrt{u_n})$ Or comme $u_n \leq v_n$ et que la fonction racine est croissante on a
$$u_{n+1} - u_n \geq 0$$
$$\boxed{\text{Autrement dit } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est croissante}}$$
On a $v_n + 1 - v_n = \frac{u_n+v_n}{2} - v_n = \frac{u_n-v_n}{2}$ Or comme $u_n \leq v_n$ on a
$$v_{n+1} - v_n \leq 0$$
$$\boxed{\text{Autrement dit } (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est décroissante}}$$

5. On va procéder par équivalence :
$$\begin{aligned}
&\frac{x+y}{2} - \sqrt{xy} \leq \frac{1}{2}(x-y) \\
\iff & y \leq \sqrt{xy} \\
\iff & y^2 \leq xy && \text{car } y \geq 0 \\
\iff & y \leq x && \text{car } y > 0
\end{aligned}$$
Cette dernière inégalité étant vérifiée par hypothèse et comme on a procédé par équivalence on a bien pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}_+)^2$ tel que $0 \leq y \leq x$
$$\boxed{\frac{x+y}{2} - \sqrt{xy} \leq \frac{1}{2}(x-y)}$$

6. Montrons par récurrence la propriété définie $\mathcal{P}(n)$ définie pour tout n par : « $v_n - u_n \leq \frac{1}{2^n}(v_0 - u_0)$. ». **Initialisation :** Pour $n = 0$, la propriété est vraie car le terme de gauche vaut $v_0 - u_0$ et le terme de droite vaut $\frac{1}{1}(v_0 - u_0)$.
Hérédité :
Soit $n \geq 0$ fixé. On suppose la propriété vraie à l'ordre n. Montrons qu'alors $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. On a

On applique l'hypothèse de récurrence, on a alors
$$\begin{aligned}
v_{n+1} - u_{n+1} &\leq \frac{1}{2} \times \frac{1}{2^n}(v_0 - u_0) \\
&\leq \frac{1}{2^{n+1}}(v_0 - u_0)
\end{aligned}$$
La propriété P est donc vraie au rang $n+1$.
Conclusion :
Il résulte du principe de récurrence que pour tout $n \geq 0$:
$$\boxed{v_n - u_n \leq \frac{1}{2^n}(v_0 - u_0).}$$

```
from math import sqrt, abs
def limite(eps,a,b):
  u=a
  v=b
  while abs(u-v)>eps:
      u,v=sqrt(u*v), (u+v)/2
  return(u)
```

Problème 1. On se propose dans ce problème de calculer la limite de la suite :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+n}$$

1. INFO Ecrire une fonction Python qui prend en argument un entier n et retourne la valeur de S_n.
2. Etude de la convergence de $(S_n)_{n\geq 1}$.
   (a) Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n \geq 0$.
   (b) Montrer que $(S_n)_{n\geq 1}$ est décroissante.
   (c) En déduire que $(S_n)_{n\geq 1}$ converge. On note ℓ sa limite.
3. Minoration de la limite
   (a) A l'aide d'un changement de variable montrer que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*,\, S_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}$$
   (b) Montrer à l'aide d'une somme téléscopique -dont on détaillera les étapes de calculs- que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
   $$\sum_{k=n}^{2n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) = \ln\left(\frac{2n+1}{n}\right)$$
   (c) En déduire la limite de $\sum_{k=n}^{2n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$.
   (d) A l'aide d'une étude fonction montrer que pour tout $x \geq 0$:
   $$\ln(1+x) \leq x.$$
   (e) Montrer à l'aide des questions précédentes que
   $$\ln(2) \leq \ell.$$

LA QUESTION 4 N EST PAS A TRAITER EN DS. C EST LE DM DE LA SEMAINE PROCHAINE !

4. Majoration de la limite.
   (a) A l'aide d'une étude de fonction, montrer que pour tout $x \geq 0$:
   $$x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x)$$
   (b) On pose $e_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{2k^2}$. On va montrer que $(e_n)_{n\geq 1}$ tend vers 0.
      i. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $e_n \geq 0$.
      ii. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $e_n \leq \frac{n+1}{2n^2}$.
      iii. Conclure.
   (c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
   $$S_n \leq e_n + \sum_{k=n}^{2n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$$
   (d) En déduire la valeur de ℓ.

Correction 5.

1.
```
def somme_S(n):
    S=0
    for k in range(0,n+1):
        S=S+1/(k+n)
    return(S)
```

2. (a) S_n est une somme de termes positifs, elle est donc positive.
   (b) On calcule $S_{n+1} - S_n$ on obtient
   $$S_{n+1} - S_n = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k+n+1} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+n}$$
   On fait un changemetn de variable sur la première somme en posant $i = k+1$ on a alors
   $$S_{n+1} - S_n = \sum_{i=1}^{n+2} \frac{1}{i+n} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+n}$$
   Ce qui se simplifie en
   $$S_{n+1} - S_n = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n}$$
   On obtient en mettant au même dénominateur
   $$S_{n+1} - S_n = \frac{-3n-2}{n(2n+1)(2n+2)} < 0$$
   $$\boxed{(S_n)_{n\geq 1} \text{ est décroissante.}}$$
   (c) $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 0 est décroissante donc
   $$\boxed{(S_n)_{n\geq 1} \text{ converge.}}$$

3. (a) On pose le changement de variable $i = k+n$. On a Comme $k \in [\![0, n]\!]$, on a $i = k+n \in [\![n, 2n]\!]$ et donc
   $$S_n = \sum_{i=n}^{2n} \frac{1}{i}$$
   Comme l'indice est muet on a bien

$$\boxed{S_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}}$$

(b)

$$\begin{aligned}
\sum_{k=n}^{2n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) &= \sum_{k=n}^{2n} \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) \\
&= \sum_{k=n}^{2n} \ln(k+1) - \ln(k) \\
&= \sum_{k=n}^{2n} \ln(k+1) - \sum_{k=n}^{2n} \ln(k)
\end{aligned}$$

On fait le changmeent de variable $i = k+1$ dans la première somme : on obtient

$$\sum_{k=n}^{2n} \ln(k+1) = \sum_{i=n+1}^{2n+1} \ln(i)$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
\sum_{k=n}^{2n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) &= \sum_{i=n+1}^{2n+1} \ln(i) - \sum_{k=n}^{2n} \ln(k) \\
&= \sum_{i=n+1}^{2n} \ln(i) + \ln(2n+1) - \left(\ln(n) + \sum_{k=n+1}^{2n} \ln(k)\right) \\
&= \ln(2n+1) - \ln(n) + \sum_{i=n+1}^{2n} \ln(i) - \sum_{k=n+1}^{2n} \ln(k) \\
&= \ln\left(\frac{2n+1}{n}\right)
\end{aligned}$$

(c) En tant que quotient de polynômes on a $\lim_{n\to+\infty} \frac{2n+1}{n} = 2$ Par composition, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln\left(\dfrac{2n+1}{n}\right) = \ln(2)$ Donc

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=n}^{2n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) = \ln(2)}$$

(d) On fait une étude de fonction : soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x - \ln(1+x)$. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x}.$$

. Ainsi pour tout $x > 0$, $f'(x) > 0$, donc f est croissante sur $\mathbb{R}_+$. Comme $f(0) = 0 - \ln(1) = 0$, on a donc pour tout $x \geq 0$ $f(x) \geq 0$, c'est-à-dire $x - \ln(1+x) \geq 0$. Finalement

$$\boxed{\forall x \geq 0,\ x \geq \ln(1+x)}$$

(e) D'après la question 1), on a pour tout $k \in \mathbb{N}^*$

$$\ln\left(1+\frac{1}{k}\right) \leq \frac{1}{k}$$

Donc en sommant pour $k \in [\![n, 2n]\!]$ on obtient :

$$\sum_{k=n}^{2n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) \leq S_n$$

On applique maintenant le résultat de bas de page, avec $u_n = \sum_{k=n}^{2n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$, $v_n = S_n$ qui sont deux suites qui admettent bien des limites donc

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=n}^{2n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) \leq \lim_{n\to+\infty} S_n$$

On obtient bien :

$$\boxed{\ln(2) \leq \ell}$$

4. (a) On fait une autre étude de fonction. On pose $g(x) = \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}$. La fonction g est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et on a

$$g'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 + x = \frac{1-1-x+x+x^2}{1+x} = \frac{x^2}{1+x}$$

Donc $g'(x) \geq 0$ pour tout $x \geq 0$ et donc g est croissante sur $\mathbb{R}_+$. Comme $g(0) = 0$, on obtient pour tout $x \geq 0$, $g(x) \geq g(0) = 0$. Ainsi pour tout $x \geq 0$, on a $\ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2} \geq 0$, d'où

$$\boxed{\forall x \geq 0,\ \ln(1+x) \geq x - \frac{x^2}{2}}$$

(b) i. La suite $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une somme de termes positifs, donc positive.

ii. On va majorer tout les termes par le plus grand terme apparaissant dans la somme. On a $\forall k \in [\![n, 2n]\!]$, $\frac{1}{2k^2} \leq \frac{1}{2n^2}$

Donc

$$e_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{2k^2} \leq \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{2n^2}$$

Or $\sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{2n^2} = \frac{1}{2n^2} \sum_{k=n}^{2n} 1$. Il y a $(n+1)$ entier entre n et $2n$ donc $\sum_{k=n}^{2n} 1 = n+1$.

On a finalement $e_n \leq \frac{1}{2n^2}(n+1)$, c'est-à-dire :

$$\boxed{\forall n \geq 1,\ e_n \leq \frac{n+1}{2n^2}}$$

iii. D'après les questions précédentes , pour tout $n \geq 1$

$$0 \leq e_n \leq \frac{n+1}{2n^2}$$

On a par ailleurs $\lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{2n^2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{2n^2} = 0$ et $\lim_{n\to+\infty} 0 = 0$.

Donc le théorème des gendarmes assure que

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} e_n = 0}$$

(c) On applique l'inégalité obtenue en 2a) à $\frac{1}{k} > 0$. On obtient donc, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{1}{k} - \frac{1}{2k^2} \leq \ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$$

En sommant ces inégalités entre n et $2n$ on obtient donc

$$\sum_{k=n}^{2n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{2k^2}\right) \leq \sum_{k=n}^{2n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$$

Ce qui donne en utilisant la linéarité :

$$\sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{2k^2} \leq \sum_{k=n}^{2n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$$

D'où

$$S_n - e_n \leq \sum_{k=n}^{2n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$$

En faisant passer e_n dans le membre de droite on obtient

$$\boxed{S_n \leq e_n + \sum_{k=n}^{2n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right)}$$

(d) On applique le théorème de bas de page aux suites $u_n = S_n$ et $v_n = e_n + \displaystyle\sum_{k=n}^{2n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$ et on obtient $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n \leq \lim_{n\to+\infty} e_n + \sum_{k=n}^{2n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$ Par somme de limites on obtient bien

$$\ell \leq \ln(2)$$

Avec l'inégalité $\ln(2) \leq \ell$ obtenue en 2e) on obtient :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} S_n = \ln(2)}$$