Correction DS3

Exercice 1. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On considère le système suivant

$$(S_\lambda) \quad \begin{cases} x + y + z = \lambda x \\ x + y + z = \lambda y \\ x + y + z = \lambda z \end{cases}$$

1. Échelonner le système.
2. Déterminer le rang de S_λ en fonction de λ
3. Déterminer Σ l'ensemble des réels λ pour lequel ce système <u>n'est pas</u> de Cramer.
4. Pour $\lambda \in \Sigma$, résoudre S_λ
5. Quelle est la solution si $\lambda \notin \Sigma$.

Correction 1.

1.

$$(S_\lambda) \iff \begin{cases} (1-\lambda)x + y + z = 0 \\ x + (1-\lambda)y + z = 0 \\ x + y + (1-\lambda)z = 0 \end{cases}$$

$L_3 \leftrightarrow L_1$

$$\iff \begin{cases} x + y + (1-\lambda)z = 0 \\ x + (1-\lambda)y + z = 0 \\ (1-\lambda)x + y + z = 0 \end{cases}$$

$L_2 \leftarrow L_2 - L_1, \quad L_3 \leftarrow L_2 - (1-\lambda)L_1$

$$\iff \begin{cases} x + y + (1-\lambda)z = 0 \\ -\lambda y + \lambda z = 0 \\ \lambda y + (1-(1-\lambda)^2)z = 0 \end{cases}$$

$L_3 \leftarrow L_3 + L_3$

$$\iff \begin{cases} x + y + (1-\lambda)z = 0 \\ -\lambda y + \lambda z = 0 \\ (1-(1-\lambda)^2 + \lambda)z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x + y + (1-\lambda)z = 0 \\ -\lambda y + \lambda z = 0 \\ \lambda(3-\lambda)z = 0 \end{cases}$$

2. Tout d'abord remarquons que $\lambda(3-\lambda) = 0 \iff \lambda \in \{0, 3\}$
   On a donc trois cas :
   <u>Si $\lambda = 0$</u>

$$S_\lambda \iff \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{\text{Le système est de rang 1}}$$

<u>Si $\lambda = 3$</u>

$$S_\lambda \iff \begin{cases} x + y + -2z = 0 \\ -3y + 3z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{\text{Le système est de rang 2}}$$

Si $\lambda \notin \{0,3\}$

$$S_\lambda \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & (1-\lambda)z & = & 0 \\ & & -y & + & z & = & 0 \\ & & & & z & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\boxed{\text{Le système est de rang 3}}$$

3. Le système n'est pas de Cramer pour $\lambda in \{0,3\}$

$$\boxed{\Sigma = \{0,3\}}$$

4. Si $\lambda = 0$ L'ensemble des solutions de S_λ est

$$\boxed{\mathcal{S} = \{(-y-z, y, z) | (y,z) \in \mathbb{R}^2\}}$$

Si $\lambda = 3$

$$S_\lambda \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{cccc} x & & = & z \\ & y & = & z \end{array}\right.$$

L'ensemble des solutions de S_λ est

$$\boxed{\mathcal{S} = \{(z,z,z) | z \in \mathbb{R}\}}$$

5. Si $\lambda \notin \{0,3\}$
Le système est de Cramer, de plus il est homogène donc

$$\boxed{\mathcal{S} = \{(0,0,0)\}}$$

Exercice 2. On définit deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$u_0 = 0 \quad v_0 = 1 \quad \text{et} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 2u_n - 4v_n \quad \text{et} \quad v_{n+1} = u_n + 4v_n.$$

1. INFO Ecrire une fonction Python qui prend en argument un entier n et retourne les valeurs de u_n et v_n.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$
$$u_{n+2} = 6u_{n+1} - 12u_n$$
3. Calculer les racines de $X^2 - 6X + 12$ et les mettre sous formes exponentielles.
4. En déduire la valeur de u_n en fonction de n.

Correction 2.

1.
```
def suite(n):
    u,v=0,1
    for i in range(n):
        u,v=2*u-4*v, u+4*v
    return(u,v)
```

2. Avec la definition de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on obtient bien l'égalité demandée :

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= 2u_{n+1} - 4v_{n+1} \\ &= 2u_{n+1} - 4(u_n + 4v_n) \\ &= 2u_{n+1} - 4u_n + 4 * (-4v_n) \\ &= 2u_{n+1} - 4u_n + 4 * (u_{n+1} - 2u_n) \\ &= 6u_{n+1} - 12u_n \end{aligned}$$

3. Le discriminant de $X^2-6X+12$ est $\Delta = 36-48 = -12$, le polynôme admet donc deux racines complexes conjuguées
$$r_1 = \frac{6-i\sqrt{12}}{2} \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{6+i\sqrt{12}}{2}$$
qui se simplient en
$$r_1 = 3-i\sqrt{3} \quad \text{et} \quad r_2 = 3+i\sqrt{3}$$
Leur module vaut $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ et on a donc
$$\begin{aligned} r_1 &= 2\sqrt{3}\left(\frac{3-i\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}\right) \\ &= 2\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}-i}{2}\right) \\ &= 2\sqrt{3}e^{-i\pi/6} \end{aligned}$$
et donc
$$\boxed{r_1 = 2\sqrt{3}e^{-i\pi/6} \quad \text{et} \quad r_2 = 2\sqrt{3}e^{i\pi/6}}$$

4. On reconnaît une suite récurrente linéaire d'ordre 2
Le cours nous dit qu'il existe $(A,B)\in\mathbb{R}^2$ tel que pour tout n on a :
$$u_n = A(2\sqrt{3})^n\cos(\frac{\pi n}{6}) + B(2\sqrt{3})^n\sin(\frac{\pi n}{6})$$
Il suffit maintenant de déterminer A et B à l'aide des valeurs de u_0 et u_1. u_0 est donné dans l'énoncé et u_1 se calcule facilement avec la relation définissant u_n :
$$u_1 = 2u_0 - 4v_0 = -4$$
On obtient alors le système :
$$\left\{\begin{array}{ccc} A & = & u_0 \\ A(2\sqrt{3})\cos(\frac{\pi}{6}) + B(2\sqrt{3})\sin(\frac{\pi}{6}) & = & u_1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ccc} A & = & 0 \\ B\sqrt{3} & = & -4 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ccc} A & = & 0 \\ B & = & \frac{-4\sqrt{3}}{3} \end{array}\right.$$
$$\boxed{u_n = \frac{-4\sqrt{3}}{3}(2\sqrt{3})^n\sin(\frac{\pi n}{6})}$$

Exercice 3. Soit $\omega = e^{\frac{2i\pi}{7}}$. On considère $A = \omega+\omega^2+\omega^4$ et $B = \omega^3+\omega^5+\omega^6$

1. Calculer $\frac{1}{\omega}$ en fonction de $\overline{\omega}$
2. Montrer que pour tout $k\in[\![0,7]\!]$ on a
$$\omega^k = \overline{\omega}^{7-k}.$$
3. En déduire que $\overline{A} = B$.
4. Justifier que $\sin\left(\frac{2\pi}{7}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{7}\right) > 0$.
5. Montrer alors que la partie imaginaire de A est strictement positive.
6. Prouver par récurrence que pour tout $q\neq 1$, et tout $n\in\mathbb{N}$: on a :
$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$
7. Montrer alors que $\sum_{k=0}^{6}\omega^k = 0$. En déduire que $A+B=-1$.
8. Montrer que $AB = 2$.

9. En déduire la valeur exacte de A.

Correction 3.

1.
$$\frac{1}{\omega} = e^{\frac{-2i\pi}{7}} = \overline{\omega}$$

2. On a $\omega^7 = e^{7\frac{2i\pi}{7}} = e^{2i\pi} = 1$ donc pour tout $k \in [\![0, 7]\!]$ on a
$$\omega^{7-k}\omega^k = 1$$
D'où
$$\omega^k = \frac{1}{\omega^{7-k}} = \overline{\omega}^{7-k}$$

3. On a d'après la question précédente :
$$\overline{\omega} = \omega^6$$
$$\overline{\omega^2} = \omega^5$$
$$\overline{\omega^4} = \omega^3$$
Ainsi on a :
$$\begin{aligned}\overline{A} &= \overline{\omega + \omega^2 + \omega^4}\\ &= \overline{\omega} + \overline{\omega^2} + \overline{\omega^4}\\ &= \omega^6 + \omega^5 + \omega^3\\ &= B.\end{aligned}$$

4.
$$\mathfrak{Im}(A) = \sin(\frac{2\pi}{7}) + \sin(\frac{4\pi}{7}) + \sin(\frac{8\pi}{7}) = \sin(\frac{2\pi}{7}) + \sin(\frac{4\pi}{7}) - \sin(\frac{\pi}{7})$$
Comme sin est croissante sur $[0, \frac{\pi}{2}[$
$$\sin(\frac{\pi}{7}) \leq \sin(\frac{2\pi}{7})$$
Donc
$$\mathfrak{Im}(A) \geq \sin(\frac{4\pi}{7}) > 0$$

5. On a
$$\sum_{k=0}^{6} \omega^k = \frac{1-\omega^7}{1-\omega} = 0$$
Or
$$A + B = \sum_{k=1}^{6} \omega^k = \sum_{k=0}^{6} \omega^k - 1 = -1$$

6. $AB = \omega^4 + \omega^6 + \omega^7 + \omega^5 + \omega^7 + \omega^8 + \omega^7 + \omega^9 + \omega^{10}$ D'où
$$AB = 2\omega^7 + \omega^4(1 + \omega^1 + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 + \omega^5 + \omega^6) = 2\omega^7 = 2$$

7. A et B sont donc les racines du polynome du second degré $X^2 + X + 2$. Son discriminant vaut $\Delta = 1 - 8 = -7$ donc
$$A \in \{\frac{-1 \pm i\sqrt{7}}{2}\}$$
D'après la question 4, $\mathfrak{Im}(A) > 0$ donc
$$A = \frac{-1 + i\sqrt{7}}{2}$$

Exercice 4. Soient z, z' deux nombres complexes.

1. Rappeler les valeurs de $z\overline{z}$, $|z\overline{z}|$ en fonction de $|z|$ et $|z'|$. Rappeler la formule reliant $z, \overline{z}$ et $Re(z)$.
2. Montrer que $|z-z'|^2 = |z|^2 - 2Re(zz') + |z'|^2$
3. On suppose dans cette question et la suivante que $|z| < 1$ et $|z'| < 1$. Montrer que
$$\overline{z}z' \neq 1$$
4. Montrer que
$$1 - \left|\frac{z-z'}{1-\overline{z}z'}\right|^2 = \frac{(1-|z'|^2)(1-|z|^2)}{|1-\overline{z}z'|^2}$$
5. Soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes vérifiant : $|z_0| < 1, |z_1| < 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$z_{n+2} = \frac{z_n - z_{n+1}}{1 - \overline{z_n}z_{n+1}}$$
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|z_n| < 1$ et que $\overline{z_n}z_{n+1} \neq 1$, et donc que $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
On pourra utiliser les deux questions précédentes dans une récurrence double

Correction 4.

1. $z\overline{z} = |z|^2$, $|z\overline{z}| = |z|^2$, $z + \overline{z} = 2Re(z)$
2. $$\begin{aligned}
|z-z'|^2 &= (z-z')\overline{(z-z')} \\
&= (z-z')(\overline{z}-\overline{z'}) \\
&= z\overline{z} - z'\overline{z} - z\overline{z'} + z'\overline{z'} \\
&= |z|^2 - (z'\overline{z} + z\overline{z'}) + |z'|^2 \\
&= |z|^2 - (z'\overline{z} + \overline{z'\overline{z}}) + |z'|^2 \\
&= |z|^2 - 2Re(z'\overline{z}) + |z'|^2
\end{aligned}$$
3. Comme $|z| < 1$ et $|z'| < 1$ on a $|\overline{z}z'| = |\overline{z}||z'| = |z||z'| < 1$. Or si deux nombres complexes sont égaux ils ont même module, donc $\overline{z}z'$ ne peut pas être égal à 1, sinon ils auraient le même module.
4. Après avoir mis au même dénominateur le membre de gauche, on va utiliser le fait que pour tout complexe u, on a $|u|^2 = u\overline{u}$:
$$\begin{aligned}
1 - \left|\frac{z-z'}{1-\overline{z}z'}\right|^2 &= \frac{|1-\overline{z}z'|^2 - |z-z'|^2}{|1-\overline{z}z'|^2} \\
&= \frac{(1-\overline{z}z')(\overline{1-\overline{z}z'}) - (z-z')(\overline{z-z'})}{|1-\overline{z}z'|^2} \\
&= \frac{(1-\overline{z}z')(1-z\overline{z'}) - (z-z')(\overline{z}-\overline{z'})}{|1-\overline{z}z'|^2} \\
&= \frac{(1-\overline{z}z' - z\overline{z'} + |\overline{z}z'|^2) - (|z|^2 - \overline{z'}z - \overline{z}z' + |z'|^2)}{|1-\overline{z}z'|^2} \\
&= \frac{(1+|\overline{z}z'|^2 - |z|^2 - |z'|^2)}{|1-\overline{z}z'|^2}
\end{aligned}$$
Remarquons enfin que $(1-|z|^2)(1-|z'|^2) = 1 + |zz'|^2 - |z|^2 - |z'|^2$. Or $|\overline{z}z'|^2 = |\overline{z}|^2|z'|^2 = |z|^2|z'|^2 = |zz'|^2$. On a bien
$$\boxed{1 - \left|\frac{z-z'}{1-\overline{z}z'}\right|^2 = \frac{(1-|z|^2)(1-|z'|^2)}{|1-\overline{z}z'|^2}}$$

5. Soit $P(n)$ la propriété : « $|z_n| < 1$ et $|z_{n+1}| < 1$ » . Remarquons que d'après la question 2, $P(n)$ implique que $\overline{z_n}z_{n+1} \neq 1$ et donc que z_{n+2} est bien définie.

   Prouvons $P(n)$ par récurrence.

   Initialisation : $P(0)$ est vraie d'après l'énoncé : $|z_0| < 1$ et $|z_1| < 1$.

   Hérédité : On suppose qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$ soit vraie. Montrons alors $P(n+1)$: « $|z_{n+1}| < 1$ et $|z_{n+2}| < 1$ ». Par hypothèse de récurrence on sait déjà que $|z_{n+1}| < 1$ il reste donc à prouver que $|z_{n+2} < 1$.

   On a
$$|z_{n+2}| = \left|\frac{z_n - z_{n+1}}{1 - \overline{z_n}z_{n+1}}\right|$$
   Or d'après la question 3,
$$\left|\frac{z_n - z_{n+1}}{1 - \overline{z_n}z_{n+1}}\right|^2 = 1 - \frac{(1-|z_n|^2)(1-|z_{n+1}|^2)}{|1-\overline{z_n}z_{n+1}|^2}$$
   Par hypothèse de récurrence, $(1-|z_n|^2)(1-|z_{n+1}|^2) > 0$. Le dénominateur est aussi positif, donc $\frac{(1-|z_n|^2)(1-|z_{n+1}|^2)}{|1-\overline{z_n}z_{n+1}|^2} > 0$ et ainsi :
$$\left|\frac{z_n - z_{n+1}}{1 - \overline{z_n}z_{n+1}}\right|^2 < 1$$
   Donc $|z_{n+2}| < 1$. On a donc prouvé que la propriété P était héréditaire.

   Conclusion : Par principe de récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$ et comme remarqué au début de récurrence, ceci implique que $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

INFORMATIQUE

Exercice 5. 1. Dire ce qu'affiche la console avec les scripts suivants

```
#script 1
L=[2*k for k in range(1,5)]
print(L)
```

```
#script 2
L=[k for k in range(1,5)]
print(L+L)
```

2. Ecrire une fonction `max_list` qui prend en argument une liste de flottants et retourne la position du maximum de cette liste. Si plusieurs valeurs réalisent ce maximum, la fonction retournera le premier indice.

   Exemple `max_list([1,5,3,5,0,2]` retournera la valeur 1

3. Que fait la fonction mystère suivante :

```
def mystere(L):
    Lt=[]
    n=len(L)
    while len(Lt)<n:
        i_m=max_list(L)  #fonction de la question 2
        M=L.pop(i_m)
         Lt.append(M) #Li.append(x) ajoute l'element x a la liste Li
    return(Lt)
```

4. Compléter (en la recopiant sur votre copie) la fonction suivante qui prend en argument une liste de flottants L et un flottant a et retourne une liste contenant tous les éléments de L supérieur ou égal à a

```python
def sous_liste_sup(L,a):
    Lsup=[]
    for el in L:
        if .... :
            Lsup.....
    return(Lsup)
```

Correction 5.

1. Le script 1 affiche

$$\boxed{\texttt{[2,4,6,8]}}$$

   Le script 2 affiche

$$\boxed{\texttt{[1,2,3,4,1,2,3,4]}}$$

2.

```python
def max_list(L):
    c=0
    M=L[0]
    for i in range(len(L)):
        if L[i]>M:
            M=L[i]
            c=i
    return(c)
```

3. La fonction crée une liste vide, la remplie en ajoutant le maximum de la liste L puis on enlève la valeur du maximum en question de la liste L. Ainsi `Lt` est triée du plus grand au plus petit.

$$\boxed{\texttt{mystere}\text{ retourne une liste triée du plus grand au plus petit}}$$

4.

```python
def sous_liste_sup(L,a):
    Lsup=[]
    for el in L:
        if el>=a :
            Lsup.append(el)
    return(Lsup)
```