

DS4

3h00

- Les calculatrices sont interdites durant les cours, TD et *a fortiori* durant les DS de mathématiques.
- Si vous pensez avoir découvert une erreur, indiquez-le clairement sur la copie et justifiez les initiatives que vous êtes amené-e ·s à prendre.
- Une grande attention sera apportée à la clarté de la rédaction et à la présentations des solutions. (Inscrivez clairement en titre le numéro de l'exercice, vous pouvez aussi encadrer les réponses finales.)
- Vérifiez vos résultats.
- Le résultat d'une question peut être admis et utilisé pour traiter les questions suivantes en le signalant explicitement sur la copie.

- Exercice 1.** 1. (a) Déterminer $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\frac{x^2}{1+x^2} = \frac{a}{1+x^2} + b$
 (b) A l'aide d'une intégration par partie, déterminer une primitive de $x \mapsto 2x \operatorname{Arctan}(x)$
 2. Résoudre l'équation différentielle suivante sur $]0, +\infty[$

$$y' + \frac{1}{x}y = 2\operatorname{Arctan}(x)$$

Exercice 2. On cherche à résoudre sur \mathbb{R}_+^* l'équation différentielle :

$$x^2 y'' - 3xy' + 4y = 0 \quad (E)$$

- Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ montrer que les fonctions de la forme $y(x) = ax^2 + bx^2 \ln(x)$ sont solutions de E .
(On mettra en valeurs les calculs de y' et y'')
- Réciproquement on considère y une solution de (E) sur \mathbb{R}_+^* et on cherche à montrer qu'elles sont bien de la forme précédente. Pour $t \in \mathbb{R}$, on pose $z(t) = y(e^t)$.
 (a) Calculer pour $t \in \mathbb{R}$, $z'(t)$ et $z''(t)$ en fonction de y et ses dérivées.
 (b) En déduire que z vérifie

$$z'' - 4z' + 4z = 0.$$

- Résoudre l'équation différentielle trouvée à la question précédente.
- Conclure

Exercice 3. 1. Résoudre $e^{-2t} - e^{-t} + \frac{1}{8} > 0$.

- La concentration d'alcool (en $g.L^{-1}$) dans le sang d'une personne ayant absorbé, à jeun, une quantité Q d'alcool vérifie l'équation différentielle :

$$y'(t) + y(t) = \frac{Q}{6} e^{-2t} \quad (E)$$

où t est le temps écoulé après ingestion exprimé en heures.

On suppose qu'une personne ingère la quantité $Q = 24g$ d'alcool. Exprimer en heure le temps qu'il faut pour que la personne possède un taux d'alcoolémie inférieur à $0.5g.L^{-1}$. (Afin de résoudre l'équation différentielle (E) , on pourra chercher une solution particulière de la forme $y_p(t) = \lambda e^{-2t}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$ est à déterminer)

On proposera un calcul littéral puis une application numérique.

Exercice 4 (Agro 2016). On considère la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n = \sum_{k=1}^n \frac{\ln k}{k}.$$

- Écrire une fonction Python `suiteS` qui prend en argument un entier `n` et retourne la valeur de S_n .
- Dresser le tableau de variations de la fonction $f : x \mapsto \frac{\ln(x)}{x}$. (On inclura les limites aux bords de l'ensemble de définition)
- En déduire que, pour tout entier k supérieur ou égal à 4, on a :

$$\int_k^{k+1} \frac{\ln(x)}{x} dx \leq \frac{\ln(k)}{k}$$

- En déduire l'existence de deux réels (A, B) tel que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{\ln^2(n+1)}{2} - A \leq S_n + B$$

- En déduire la limite de la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

- Exercice 5.** 1. Écrire une fonction **Paire** qui prend en argument une liste d'entiers et qui renvoie la liste dont les nombres pairs sont divisés par 2 et les nombres impaires sont multipliés par 2. Par exemple, la fonction **Paire** appliquée à la liste `[4,1,8,3,5]` renvoie `[2,2,4,6,10]`.
2. Écrire une fonction **PosNeg** qui prend en argument une liste de flottant `L` et qui renvoie deux listes **Pos** et **Neg** contenant respectivement les éléments strictement positifs et strictement négatifs de `L`. Par exemple, la fonction **PosNeg** appliquée à la liste `[2.,-3.5,1.,2.45,-1.]` renvoie les listes `[2.,1.,2.45]` et `[-3.5,-1.]`.
3. Écrire une fonction **Intersection** qui prend en argument deux listes d'entiers `L` et `M` et qui renvoie la liste des éléments présents à la fois dans `L` et dans `M`. Par exemple, la fonction **Intersection** appliquée aux listes `[2,8,1,5,9]` et `[3,2,6,1,10]` renvoie `[2,1]`.
4. On considère la fonction suivante :

```
1 def mystere(L, M) :
2     K = []
3     for i in range(len(L)) :
4         if not L[i] in M :
5             K.append(L[i])
6     return K
```

Expliquer ce que renvoie cette fonction.