DS 9

Durée 2h

Exercice 1. Soit $f \in \mathscr{L}\left(\mathbb{R}^3\right)$ canoniquement associé à la matrice $A = \begin{pmatrix} 5 & -8 & -4 \\ 8 & -15 & -8 \\ -10 & 20 & 11 \end{pmatrix}$. On pose : $u = (2, 4, -5)$

$$\nu = (1, 0, 1) \quad w = (0, -1, 2)$$

1. Montrer que $u \in \mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id})$ et que $\{v, w\} \subset \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})$
2. Montrer que (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$.
3. Donner la matrice de f dans la base (u, v, w).
4. En déduire f^2.

Correction 1.

1. La matrice canoniquement associée à $f + \mathrm{Id}$ est

$$A + I_3 = \begin{pmatrix} 6 & -8 & -4 \\ 8 & -14 & -8 \\ -10 & 20 & 12 \end{pmatrix}$$

Et

$$\begin{pmatrix} 6 & -8 & -4 \\ 8 & -14 & -8 \\ -10 & 20 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 - 32 + 20 \\ 16 - 56 + 40 \\ -20 + 80 - 60 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On a donc $(f + \mathrm{Id})(u) = (0, 0, 0)$ d'où par définition

$$\boxed{u \in \ker(f + \mathrm{Id})}$$

La matrice canoniquement associée à $f - \mathrm{Id}$ est

$$A - I_3 = \begin{pmatrix} 4 & -8 & -4 \\ 8 & -16 & -8 \\ -10 & 20 & 10 \end{pmatrix}$$

Et

$$\begin{pmatrix} 4 & -8 & -4 \\ 8 & -16 & -8 \\ -10 & 20 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 - 4 \\ 8 - 8 \\ -10 + 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On a donc $(f - \mathrm{Id})(v) = (0, 0, 0)$ d'où par définition

$$\boxed{v \in \ker(f + \mathrm{Id})}$$

Les mêmes calculs montrent que $(f - \mathrm{Id})(w) = (0, 0, 0)$ d'où par définition

$$\boxed{w \in \ker(f + \mathrm{Id})}$$

2. Montrons que (u,v,w) est une famille libre. Soit $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$ 3 réels tels que $\lambda_1 u+\lambda_2 v+\lambda_3 w = (0,0,0)$

On a alors : $\begin{cases} 2\lambda_1 & +2\lambda_2 & & = & 0\\ 4\lambda_1 & & -\lambda_3 & = & 0\\ -5\lambda_1 & +\lambda_2 & +2\lambda_3 & = & 0\end{cases}$

$L_2 \leftarrow 2L_2+L_3$

$\begin{cases} 2\lambda_1 & +2\lambda_2 & & = & 0\\ 3\lambda_1 & +\lambda_2 & & = & 0\\ -5\lambda_1 & +\lambda_2 & +2\lambda_3 & = & 0\end{cases}$

$L_1 \leftarrow L_1-2L_3$ $\begin{cases} -\lambda_1 & & & = & 0\\ 3\lambda_1 & +\lambda_2 & & = & 0\\ -5\lambda_1 & +\lambda_2 & +2\lambda_3 & = & 0\end{cases}$ Le système est échelonné (à l'envers par rapport à d'habitude), il est de rang 3, l'unique solution est $(0,0,0)$ ainsi la famille est libre.

Comme de plus elle est de cardinal 3 qui est égal à la dimension de $\mathbb{R}^3$, la famille est aussi génératrice. Ainsi :

$$\boxed{(u,v,w) \text{ est une base de } \mathbb{R}^3}$$

3. D'après la question 1, $f(u)=-u$, $f(v)=v$ et $f(w)=w$ Ainsi dans la base (u,v,w), la matrice de f est

$$\boxed{\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}}$$

4. La matrice de f^2 dans la base (u,v,w) est égale à la matrice identité. Ainsi

$$\boxed{f^2 = Id_3}$$

Exercice 2. On définit l'application :

$$g \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2\\ (x,y) & \mapsto & (3x+2y,-x)\end{array}\right.$$

1. Montrer que g est un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$.
2. Exprimer $g\circ g$ et vérifier que $g^2 = 3g - 2\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}$
3. Donner une base de $F=\ker(g-\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2})$ et $G=\ker(g-2\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2})$.
4. Montrer que $F\cap G = \{0\}$

Correction 2.

1. g est une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$, il suffit donc de vérifier que g est linéaire. Pour cela on considère $(x_1,y_1)\in R^2,(x_2,y_2)\in\mathbb{R}^2,\lambda\in\mathbb{R}$ et

$$\begin{aligned} g((x_1,y_1)+\lambda(x_2,y_2)) &= g(x_1+\lambda x_2, y_1+\lambda y_2)\\ &= (3(x_1+\lambda x_2)+2(y_1+\lambda y_2), -(x_1+\lambda x_2))\\ &= (3x_1+2y_1+\lambda(3x_2+2y_2), -x_1 - lambda x_2))\\ &= (3x_1+2y_1,-x_1)+\lambda(3x_2+2y_2,-x_2))\\ &= g(x_1,y_1)+\lambda g(x_2,y_2)\end{aligned}$$

Ainsi g est linéaire,

$$\boxed{g \text{ est donc un endomorphisme de } \mathbb{R}^2}$$

2. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned}
g \circ g(x, y) &= g(3x + 2y, -x) \\
&= (3(3x + 2y) + 2(-x), -(3x + 2y)) \\
&= (7x + 6y, -3x - 2y) \\
&= (9x + 6y, -3x) + (-2x, -2y) \\
&= 3(3x + 2y, -x) - 2(x, y) \\
&= 3g(x, y) - 2\,\mathrm{Id}(x, y)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On a bien } g^2 = 3g - 2\,\mathrm{Id}}$$

3.

$$\begin{aligned}
F &= \ker(g - \mathrm{Id}) \\
&= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, g(x, y) - (x, y) = (0, 0)\} \\
&= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, (2x + 2y, -x - y) = (0, 0)\} \\
&= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 2x + 2y = 0 \text{ et } x + y = 0\} \\
&= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x + y = 0\} \\
&= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x = -y\} \\
&= \{(-y, y) \,|\, y \in \mathbb{R}\} \\
&= \{y(-1, 1) \,|\, y \in \mathbb{R}\} \\
&= Vect((-1, 1))
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi } F \text{ est un sev de } \mathbb{R}^2 \text{ de dimension 1, et } (-1, 1) \text{ est une base de } F}$$

4.

$$\begin{aligned}
G &= \ker(g - 2\,\mathrm{Id}) \\
&= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, g(x, y) - 2(x, y) = (0, 0)\} \\
&= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, (x + 2y, -x - 2y) = (0, 0)\} \\
&= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x + 2y = 0 \text{ et } - x - 2y = 0\} \\
&= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x + 2y = 0\} \\
&= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x = -2y\} \\
&= \{(-2y, y) \,|\, y \in \mathbb{R}\} \\
&= \{y(-2, 1) \,|\, y \in \mathbb{R}\} \\
&= Vect((-2, 1))
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi } G \text{ est un sev de } \mathbb{R}^2 \text{ de dimension 1, et } (-2, 1) \text{ est une base de } G}$$

5. Comme F et G sont des espaces vectoriels, $0 \in F$ et $0 \in G$ donc, $\{(0, 0)\} \subset F \cap G$.
   Soit $u \in F \cap G$, comme $u \in F$ on a $g(u) - u = 0$ et donc $g(u) = u$. Comme $u \in G$ on a $g(u) - 2u = 0$ donc $g(u) = 2u$. Ainsi $u = 2u$ et donc $u = 0$. On a donc $F \cap G \subset \{(0, 0)\}$

$$\boxed{\text{Par double inclusion } F \cap G = \{(0, 0)\}}$$

Exercice 3. 1. Donner les DL en 0 à l'ordre 5 des fonctions suivantes (on ne demande pas de calculer les valeurs des factorielles) :

— $f_1(x) = \exp(x)$

— $f_2(x) = \ln(1+x)$

— $f_3(x) = \cos(x)$

— $f_4(x) = \sin(x)$

— $f_5(x) = \dfrac{1}{1+x}$

2. Donner les DL des fonctions suivantes :

— $f_6(x) = \cos(x)(\exp(x) - 1)$ en 0 à l'ordre 3

— $f_7(x) = \sqrt{1 + \ln(1+x)}$ en 0 à l'ordre 2

— $f_8(x) = \dfrac{1}{\cos(x)}$ en 0 à l'ordre 2

— $f_9(x) = \dfrac{\sin(x) - x}{e^x - 1}$ en 0 à l'ordre 2

3. Calculer la limite suivante

— $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x) - \sin(x)}{x^2}$

Correction 3.

1. Question de cours :

$$\exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + o(x^5)$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^5)$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + o(x^5)$$

2. — On a d'une part

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)$$

et d'autre par

$$\exp(x) - 1 = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$$

Ainsi

$$f_6(x) = (1 - \frac{x^2}{2})(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!}) + o(x^3) = x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{2} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$$

$$f_6(x) = x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

— On a d'une part

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

et d'autre part

$$\sqrt{1+u} = 1 + \frac{u}{2} - \frac{u^2}{8} + o(u^2)$$

Donc

$$f_7(x) = \frac{1}{2}(x - \frac{x^2}{2}) - \frac{1}{8}(x - \frac{x^2}{2}))^2 + o(x^2)$$

Ce qui donne après simplification :

$$\boxed{f_7(x) = 1 + \tfrac{x}{2}x - \tfrac{3x^2}{8} + o(x^2)}$$

— On a d'une part

$$\cos(x) - 1 = -\frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

et d'autre part et d'autre part

$$\frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 + o(u^2)$$

Ainsi

$$\boxed{\tfrac{1}{\cos(x)} = \tfrac{1}{1+\cos(x)-1} = 1 + \tfrac{x^2}{2} + o(x^2)}$$

— On a d'une part

$$\sin(x) - x = \frac{-x^3}{6} + o(x^3)$$

et d'autre part

$$e^x - 1 = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

Donc en factorisant par x on a

$$f_9(x) = \frac{\frac{-x^2}{6} + o(x^2)}{1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + o(x^2)}$$

De plus :

$$\begin{aligned}\frac{1}{1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + o(x^2)} &= 1 - \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{6}\right) + \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{6}\right)^2 + o(x^2)\\ &= 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{12} + o(x^2)\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}f_9(x) &= \frac{-x^2}{6}\left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{12}\right) + o(x^2)\\ &= \frac{-x^2}{6} + o(x^2)\end{aligned}$$

$$\boxed{f_9(x) = \tfrac{-x^2}{6} + o(x^2)}$$

3. $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ et $\sin(x) = x + o(x^2)$ d'où $\ln(1+x) - \sin(x) = -\frac{x^2}{2} + o(x^2)$ Ainsi

$$\frac{\ln(1+x) - \sin(x)}{x^2} = \frac{-1}{2} + o(1)$$

D'où

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x) - \sin(x)}{x^2} = \frac{-1}{2}}$$