DS 9

Exercice 1. Soit $f \in \mathscr{L}\left(\mathbb{R}^3\right)$ canoniquement associé à la matrice $A = \begin{pmatrix} 5 & -8 & -4 \\ 8 & -15 & -8 \\ -10 & 20 & 11 \end{pmatrix}$. On pose : $u = (2,4,-5)$

$$\nu = (1,0,1) \quad w = (0,-1,2)$$

1. Montrer que $u \in \operatorname{Ker}(f + \operatorname{Id})$ et que $\{v, w\} \subset \operatorname{Ker}(f - \operatorname{Id})$
2. Montrer que (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$.
3. Donner la matrice de f dans la base (u, v, w).
4. En déduire f^2.

Exercice 2. On définit l'application :

$$g \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (3x+2y, -x) \end{array} \right.$$

1. Montrer que g est un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$.
2. Exprimer $g \circ g$ et vérifier que $g^2 = 3g - 2\operatorname{Id}_{\mathbb{R}^2}$
3. Donner une base de $F = \ker(g - \operatorname{Id}_{\mathbb{R}^2})$ et $G = \ker(g - 2\operatorname{Id}_{\mathbb{R}^2})$.
4. Montrer que $F \cap G = \{0\}$

Exercice 3.

1. Donner les DL en 0 à l'ordre 5 des fonctions suivantes (on ne demande pas de calculer les valeurs des factorielles) :
   — $f_1(x) = \exp(x)$

   — $f_2(x) = \ln(1+x)$

   — $f_3(x) = \cos(x)$

   — $f_4(x) = \sin(x)$

   — $f_5(x) = \dfrac{1}{1+x}$
2. Donner les DL des fonctions suivantes :
   — $f_6(x) = \cos(x)(\exp(x) - 1)$ en 0 à l'ordre 3

   — $f_7(x) = \sqrt{1 + \ln(1+x)}$ en 0 à l'ordre 2

   — $f_8(x) = \dfrac{1}{\cos(x)}$ en 0 à l'ordre 2

   — $f_9(x) = \dfrac{\sin(x) - x}{e^x - 1}$ en 0 à l'ordre 2
3. Calculer la limite suivante
   — $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x) - \sin(x)}{x^2}$