Logique et quantificateurs

Définition 1. Soit P une proposition. La proposition **NON** P, appelée négation de P, est la proposition fausse si P est vraie, et vraie si P est fausse.

Exemples

- Soit P la proposition : 'La fonction f est croissante'. On a alors
  NON(P) :
  En particulier, ceci ne signifie pas 'la fonction f est décroissante'.
- Soit P la proposition : 'Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 + 2x - 1 > 0$'. On a alors
  NON(P) :
- NON $(x = 1)$:
- NON $(x > y)$:

Définition 2. Soient P, Q deux propositions. La proposition P **OU** Q, est la proposition vraie si soit P soit Q est vraie, et fausse sinon.

Exemples

- (la fonction $\ln$ est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$) ou (la fonction $\sin$ est paire) est ....
- (3<0) ou (π est un entier) est ....
- (la fonction $\sin$ est impaire) ou (la fonction $\cos$ est paire) est ....

Définition 3. Soient P, Q deux propositions. La proposition P **ET** Q, est la proposition vraie si à la fois P et Q sont vraies, et fausse sinon.

Exemples

- (la fonction $\ln$ est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$) et (la fonction $\sin$ est paire) est ....
- (3<0) et (π est un entier) est ....
- (la fonction $\sin$ est impaire) et (la fonction $\cos$ est paire) est ....

Définition 4. Soient P, Q deux propositions. On définit $'P \Longrightarrow Q'$ par $'\,\mathrm{NON}(P)\,\mathrm{OU}\,Q'$. On dit que P implique Q.

Heuristiquement ceci correspond à dire que P 'est plus forte que' Q : Si P est vraie alors nécessairement Q est vraie. En revanche si P est fausse on ne peut rien dire sur Q. A partir d'un postulat faux on peut arriver à tout et n'importe quoi !

De manière pratique, pour prouver une implication on s'intéressera seulement au cas où P est vraie.

Exemples

— $\forall x \in \mathbb{R}, \quad (x > 1) \Longrightarrow (x^2 > 1)$ est une proposition ....
— $\forall x \in \mathbb{R}, \quad (x^2 > 1) \Longrightarrow (x > 1)$ est une proposition ....
— $\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad (\sqrt{x} > 1) \Longrightarrow (x > 1)$ est une proposition ....

Définition 5. Soient P, Q deux propositions. On définit $'P \Longleftrightarrow Q'$ par $'P \Longrightarrow Q\,\mathrm{ET}\,Q \Longrightarrow P'$. On dit que P équivaut à Q.

Dans ce cas, P est vraie si et seulement si Q est vraie.

Proposition 1. Avec les opérateurs ET et OU :

- $\text{NON }(P\,\text{OU}\,Q) = \text{NON}(P)\,\text{ET}\,\text{NON}(Q)$
- $\text{NON }(P\,\text{ET}\,Q) = \text{NON}(P)\,\text{OU}\,\text{NON}(Q)$
- $P\,\text{ET}(Q\,\text{OU}\,R) = (P\,\text{ET}\,Q)\,\text{OU}(P\,\text{ET}\,R)$
- $P\text{OU}(Q\text{ET}R) = (P\,\text{OU}\,Q)\,\text{ET}(P\,\text{OU}\,R)$

Exemple On utilise cette propriété : "$P\,\text{ET}(Q\,\text{OU}\,R) = (P\,\text{ET}\,Q)\,\text{OU}(P\,\text{ET}\,R)$" lorsque l'on fait une disjonction de cas. Considérons par exemples la propriété

$$P(x) : "|x+1| < x"$$

Remarquons que x est solution de l'équation $|x+1| < x$ si et seulement si $P(x)$ est vraie. La disjonction de cas consiste alors à considérer les deux propositions

$$Q(x) : "x+1 > 0" \quad \text{et} \quad R(x) : "x+1 \leq 0".$$

Remarquons que $Q(x)\,\text{OU}\,R(x)$ est vraie pour tout $x \in \mathbb{R}$. Ainsi $\Big(P(x)\,\text{ET}(Q(x)\,\text{OU}\,R(x))\Big) = P(x)$.

Enfin les propositions $(P(x)\,\text{ET}\,Q(x))$ et $(P(x)\,\text{ET}\,R(x))$ correspondent aux solutions respectives de l'équation dans le cas où $x+1 > 0$ puis $x+1 \leq 0$.

Proposition 2. Avec l'opérateur $\Longrightarrow$:

- $'P \Longrightarrow Q' = '\,\text{NON}(Q) \Longrightarrow \text{NON}(P)'$ (C'est la base de la contraposée)
- $'\,\text{NON }(P \Longrightarrow Q)' = 'P\,\text{ET}\,\text{NON}(Q)'$ (C'est la base du raisonnement par l'absurde)

Exemples

— Méthode directe

- Montrer que pour tout entier n, $\big(n \geq 2 \Rightarrow n + \frac{1}{n} \geq 2\big)$.
- Si $n \in \mathbb{N}$ est impair alors n^2 est impair.

— Contraposée : Au lieu de prouver $P \Longrightarrow Q$ on prouve $\text{NON}(P) \Longrightarrow \text{NON}(Q)$ qui lui est équivalent.

- Si $x^3 = 2$ alors $x < 2$.
- Si $n^2 \in \mathbb{N}$ est pair alors n est pair.

— Absurde. Au lieu de prouver $P \Longrightarrow Q$ on prouve que $P\,\text{ET}\,\text{NON}(Q)$ est fausse.

- (Le grand classique) $\sqrt{2}$ est irrationel.
- Si $x \in \mathbb{N}$ est entier alors $x + \dfrac{1}{2}$ n'est pas entier.

Définition 6. Soit E un ensemble et $P(x)$ une propriété.

- $\forall$ se lit 'quelque soit' Si $P(x)$ est vraie pour tout $x \in E$, on écrit : $\forall x \in E,\ P(x)$
- $\exists$ se lit 'il existe' Si $P(x)$ est vraie pour au moins un $x \in E$, on écrit : $\exists x \in E,\ P(x)$

Plus rarement on utilise $\exists!$ qui se lit 'il existe un unique'. Si $P(x)$ est vraie pour un unique élément $x \in E$, on écrit alors $\exists! x \in E, P(x)$

⚠ Toutes les variables[1] doivent être quantifiées.

⚠ L'ordre des quantificateurs est important. Plus précisément :

⚠ Les quantificateurs ne peuvent pas être interchangés.

⚠ On n'utilisera pas les quantificateurs à la place du français. Tirer du programme officiel : « L'usage des quantificateurs hors des énoncés mathématiques est à proscrire. » Cette mise en garde s'applique aussi pour les opérateurs $\Longrightarrow$ et $\Longleftrightarrow$.

La négation d'un 'pour tout' est 'il existe', et vice-versa, la négation d'un 'il existe' est 'pour tout'.

$$\text{"NON}(\forall x \in E,\ P(x))\text{"} = \text{"}\exists x \in E,\ \text{NON}(P(x))\text{"}$$
$$\text{"NON}(\exists x \in E,\ P(x))\text{"} = \text{"}\forall x \in E,\ \text{NON}(P(x))\text{"}$$

Exercice 1. Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Donner leur négation.

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ x \geq 0$.
2. $\exists y \in \mathbb{R},\ y \geq 0$.
3. $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ \exists y \in \mathbb{R},\ x = y^2$.
4. $\exists y \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R}^+,\ x = y^2$.
5. $\exists x \in \mathbb{R}^+,\ \forall y \in \mathbb{R},\ x = y^2$.
6. $\exists x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ x + y > 0$.
7. $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ x + y > 0$.
8. $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ x + y > 0$.

Exercice 2. Soit (f, g) deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Écrire à l'aide des quantificateurs les énoncés suivants puis les nier. Donner des exemples de fonctions qui vérifient ces propriétés ou leur négation.

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \leq 1$.
2. L'application f est croissante.
3. Il existe un réel positif x tel que $f(x) \geq 0$.
4. La fonction f est paire.
5. La fonction f ne s'annule jamais.
6. La fonction f atteint toutes les valeurs de $\mathbb{N}$.
7. La fonction f est inférieure à la fonction g.
8. La fonction f est périodique.

Exercice 3. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Écrire les négations des propositions suivantes :

1. $1 \leq x < y$.
2. $(x^2 = 1) \Longrightarrow x = 1$.
3. $\forall x \in E,\ \forall x' \in E,\ (x \neq x') \Longrightarrow f(x) \neq f(x')$.

Exercice 4. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On considère les trois propositions suivantes

$$P_1(f) : \text{"}\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) < M\text{"}$$
$$P_2(f) : \text{"}\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, f(x) < f(y)\text{"}$$
$$P_3(f) : \text{"}\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}^+, f(x) \geq f(y)\text{"}$$

1. Donner les négations de ces propositions
2. Dire si ces propositions sont vraies ou fausses pour les fonctions suivantes :

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 1 \end{array} \right. , \quad g \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \exp(x) \end{array} \right. , \quad h \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \cos(x) \end{array} \right.$$

On justifiera, dans le cas où les propositions sont vraies, en donnant une valeur pour les variables quantifiées par le quantificateur $\exists$

1. Sauf les variables 'muettes' celles se trouvant au sein d'une focntion mathématique telles que $\sum_{k=0}^{n}$ (ici k est muet mais pas n) ou $\lim_{x \to 0} f(x)$ (ici x est muet.) Ces variables sont 'muettes' car elles n'ont pas de valeurs bien définies, et ne servent qu'à l'utilisation du symbole mathématiques sous-jacent.