Valeur absolue

Définition 1. La fonction *valeur absolue* est notée $|\cdot| : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ et définie par :

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Remarque :

- En particulier, la fonction valeur absolue est toujours positive. De plus, $|x| = 0$ si et seulement si $x = 0$.
- Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ alors, $|x - y|$ correspond à la distance entre x et y sur la droite réelle.
- On a $x \leq |x|$ et $-x \leq |x|$.
- La fonction valeur absolue est continue sur $\mathbb{R}$ mais pas dérivable en 0.

Proposition 1. Soit, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a alors :

1. $|x| = |-x|$
2. $|xy| = |x||y|$
3. Si $y \neq 0$ alors, $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$.

Proposition 2 (Inégalité triangulaire ⚠). Soit, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a alors :

$$|x + y| \leq |x| + |y|.$$

Proposition 3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\sqrt{(x^2)} = |x|$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}^+$,

$$(\sqrt{x})^2 = x = |x|$$

Proposition 4. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$|x|^2 = |x^2| = x^2$$

Proposition 5. Soit $a \in \mathbb{R}$ un réel et $\epsilon > 0$ un réel strictement positif. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a

$$|x - a| \leq \epsilon \Longleftrightarrow a - \epsilon \leq x \leq a + \epsilon \Longleftrightarrow x \in [a - \epsilon, a + \epsilon].$$

En particulier, pour tout $\epsilon > 0$, l'inégalité $|x| \leq \epsilon$ est équivalente à $-\epsilon \leq x \leq \epsilon$ ou a $x \in [-\epsilon, \epsilon]$.

- Pour enlever une valeur absolue, il faut connaître le signe de ce qui est à l'intérieur.
  $\Longrightarrow$ Étude de cas selon le signe de ce qui est à l'intérieur de la valeur absolue.