

# Correction DS3

**Exercice 1.** 1. Soit  $z \in \mathbb{C}$ . Rappeler le lien entre  $z$ ,  $\bar{z}$  et  $|z|$  d'une part, et entre  $z$ ,  $\bar{z}$  et  $Re(z)$  d'autre part.

2. En déduire que pour tout  $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$  on a :

$$|z_1 - z_2|^2 = |z_1|^2 - 2Re(z_1 z_2) + |z_2|^2$$

## Correction 1.

1.  $z\bar{z} = |z|^2$ ,  $|z\bar{z}| = |z|^2$ ,  $z + \bar{z} = 2Re(z)$

2.

$$\begin{aligned} |z - z'|^2 &= (z - z')\overline{(z - z')} \\ &= (z - z')(\bar{z} - \bar{z}') \\ &= z\bar{z} - z'\bar{z} - z\bar{z}' + z'\bar{z}' \\ &= |z|^2 - (z'\bar{z} + z\bar{z}') + |z'|^2 \\ &= |z|^2 - (z'\bar{z} + \overline{z'\bar{z}}) + |z'|^2 \\ &= |z|^2 - 2Re(z'\bar{z}) + |z'|^2 \end{aligned}$$

**Exercice 2.** On considère la relation de récurrence :

$$(R) : \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n + 1$$

Soit  $(u_n)$  vérifiant  $(R)$ , et  $u_0 = 1$ ,  $u_1 = 3$ .

1. Déterminer une suite  $(v_n)$  vérifiant  $(R)$  de la forme :  $v_n = an + b$  avec  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ .

2. On pose alors  $w_n = u_n - v_n$ . Montrer que  $(w_n)$  vérifie :

$$\forall n \in \mathbb{N}, w_{n+2} = 3w_{n+1} - 2w_n$$

3. En déduire l'expression de  $w_n$  en fonction de  $n$ .

4. Donner alors l'expression de  $u_n$  en fonction de  $n$ .

## Correction 2.

1. Remplaçons dans  $(R)$  l'expression de  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . On obtient

$$a(n+2) + b = 3(a(n+1) + b) - 2(an + b) + 1$$

Ce qui donne après simplification

$$2a + b = 3a + b + 1$$

d'où

$$a = -1$$

Il n'y a pas de condition sur  $b$ .

On peut ainsi voir que la suite  $v_n = -n$  vérifie  $(R)$

2. D'après la définition de  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$  on a

$$\begin{aligned}w_{n+2} &= u_{n+2} - v_{n+2} \\ &= 3u_{n+1} - 2u_n + 1 - (3v_n + 1 - 2v_n + 1) \\ &= 3(u_{n+1} - v_{n+1}) - 2(u_n - v_n) \\ &= 3w_{n+1} - 2w_n\end{aligned}$$

$$\boxed{(w_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ vérifie la relation de SRL2 demandée}}$$

3. Soit  $P(X) = X^2 - 3X + 2$  le polynôme caractéristique de  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .  $P(X)$  admet deux racines 1 et 2. Donc  $\exists(A, B) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N}$  :

$$w_n = A2^n + B1^n = A2^n + B$$

De plus on a d'une part  $w_0 = u_0 - v_0 = 1 - 0 = 1$  et  $w_1 = u_1 - v_1 = 3 - (-1) = 4$  et d'autre part  $w_0 = A + B$  et  $w_1 = 2A + B$  On obtient ainsi le système

$$\begin{cases} A + B &= 1 \\ 2A + B &= 4 \end{cases}$$

On obtient après résolution

$$A = 3 \quad \text{et} \quad B = -2$$

$$\boxed{w_n = 3 * 2^n - 2}$$

4. Comme  $w_n = u_n - v_n$  on a  $u_n = w_n + v_n$  donc

$$\boxed{u_n = 3 * 2^n - 2 - n}$$

**Exercice 3.** Pour tout complexe  $z$ , on considère :  $f(z) = z^4 - 2z^3 + 6z^2 - 8z + 8$

1. Soit  $b \in \mathbb{R}$ , exprimer en fonction de  $b$  les parties réelles et imaginaires de  $f(ib)$ .
2. En déduire que l'équation  $f(z) = 0$  admet deux solutions imaginaires pures. Quel lien y a-t-il entre ces solutions ?
3. Démontrer qu'il existe deux réels  $\alpha$  et  $\beta$  tels que pour tout  $z \in \mathbb{C}$  :

$$f(z) = (z^2 + 4)(z^2 + \alpha z + \beta)$$

4. Résoudre alors  $f(z) = 0$  dans  $\mathbb{C}$ .

### Correction 3.

1.

$$f(ib) = (ib)^4 - 2(ib)^3 + 6(ib)^2 - 8(ib) + 8 \tag{1}$$

$$= b^4 + 2ib^3 - 6b^2 - 8ib + 8 \tag{2}$$

$$= b^4 - 6b^2 + 8 + i(2b^3 - 8b) \tag{3}$$

$$\boxed{\operatorname{Re}(f(ib)) = b^4 - 6b^2 + 8 \text{ et } \operatorname{Im}(f(ib)) = 2b^3 - 8b}$$

2. D'après la question précédente  $f(ib) = 0 \iff b^4 - 6b^2 + 8 = 0$  et c On a les factorisations suivantes :

$$\begin{aligned} 2b^3 - 8b &= 2b(b^2 - 4) \\ &= 2b(b - 2)(b + 2) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} b^4 - 6b^2 + 8 &= (b^2 - 4)(b^2 - 2) \\ &= (b - 2)(b + 2)(b - \sqrt{2})(b + \sqrt{2}) \end{aligned}$$

Donc

$$b^4 - 6b^2 + 8 = 0 \iff b \in \{2, -2, \sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$$

et

$$2b^3 - 8b = 0 \iff b \in \{2, -2\}$$

Ainsi

$$f(ib) = 0 \iff b \in \{2, -2\}$$

$f(z)$  admet deux solutions imaginaires pures :  $2i$ , et  $-2i$ . Ces solutions sont conjuguées l'une de l'autre

3.  $(z^2 + 4)(z^2 + \alpha z + \beta) = z^4 + \alpha z^3 + (4 + \beta)z^2 + 4\alpha z + 4\beta$

En identifiant on obtient

$$\alpha = -2 \text{ et } \beta = 2$$

4.  $z^2 - 2z + 2$  admet comme discriminant  $\Delta = 4 - 8 = -4$  et donc comme racine :

$$r_1 = \frac{2 + 2i}{2} = 1 + i \quad \text{et} \quad r_2 = 1 - i$$

L'ensemble des solutions de  $f(z) = 0$  est donc

$$\mathcal{S} = \{2i, -2i, 1 + i, 1 - i\}$$

**Exercice 4.** On définit deux suites  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  par

$$u_0 = 3 \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{2u_n}{u_n + 1} \quad v_n = \frac{2u_n - 1}{-u_n + 1}$$

1. **Python** : Ecrire une fonction Python qui prend en argument un entier  $n$  et retourne la valeur de  $u_n$  et  $v_n$ .
2. Résoudre  $\frac{2x}{x+1} > 1$
3. Montrer par récurrence que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n > 1$  et en déduire que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sont bien définies.
4. Montrer que  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  vérifie pour tout  $n \in \mathbb{N}$

$$v_{n+1} = 2v_n + 1$$

5. Donner l'expression de  $v_n$  en fonction de  $n$ .
6. En déduire l'expression de  $u_n$  en fonction de  $n$ .

### Correction 4.

```
1. def suite_u(n):  
    u=3  
    for i in range(1,n+1):  
        u=2*u/(u+1)  
    return(u)
```

2.

$$\begin{aligned}\frac{2x}{x+1} &> 1 \\ \frac{2x}{x+1} - 1 &> 0 \\ \frac{x-1}{x+1} &> 0\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est donc

$$\boxed{\mathcal{S} = ]-\infty, -1[ \cup ]1, +\infty[}$$

3. Soit  $P(n)$  la propriété  $P(n) := "u_n > 1"$ . Remarquons tout d'abord que si on prouve  $P(n)$  alors  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sont bien définies car  $P(n)$  implique que  $u_n \neq -1$  et  $-u_n \neq +1$ . On va prouver  $P(n)$  par récurrence.

Initialisation :  $P(0)$  est vraie d'après l'énoncé, en effet  $u_0 = 3 > 1$

Hérédité : Supposons qu'il existe  $n \in \mathbb{N}$ , tel que  $P(n)$  soit vraie. On a alors  $u_n > 1$ . D'après la question précédente, on a donc que  $\frac{2u_n}{u_n+1} > 1$  car  $u_n \in \mathcal{S}$

Ainsi

$$u_{n+1} > 1$$

ce qui prouve  $P(n+1)$ .

Conclusion :  $P(n)$  est vraie pour tout  $n \in \mathbb{N}$

4. On a d'une part

$$\begin{aligned}v_{n+1} &= \frac{2u_{n+1} - 1}{-u_{n+1} + 1} \\ &= \frac{2 \cdot \frac{2u_n}{u_n+1} - 1}{-\frac{2u_n}{u_n+1} + 1} \\ &= \frac{4u_n - u_n - 1}{-2u_n + u_n + 1} \\ &= \frac{3u_n - 1}{-u_n + u_n + 1}\end{aligned}$$

et d'autre part

$$\begin{aligned}2v_n + 1 &= 2 \frac{2u_n - 1}{-u_n + 1} + 1 \\ &= \frac{4u_n - 2 - u_n + 1}{-u_n + 1} \\ &= \frac{3u_n - 1}{-u_n + 1}\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On obtient bien } v_{n+1} = 2v_n + 1}$$

5. On reconnaît une suite arithmético-géométrique. On utilise donc une suite auxiliaire :

$$w_n = v_n - \alpha$$

où  $\alpha \in \mathbb{R}$  est un réel à déterminer afin que  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$  soit géométrique.

$$\begin{aligned} w_{n+1} &= v_{n+1} - \alpha \\ &= 2v_n + 1 - \alpha \\ &= 2(w_n + \alpha) + 1 - \alpha \\ &= 2w_n + \alpha + 1 \end{aligned}$$

On choisit donc  $\alpha = -1$  et alors  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est géométrique de raison 2. Le cours donne  $w_n = w_0 2^n$ . Ce qui donne pour

$$v_n = (v_0 - \alpha)2^n + \alpha$$

Il reste à calculer  $v_0$ , avec la formule définissant  $v_n$  :

$$v_0 = \frac{2u_0 - 1}{-u_0 + 1} = -\frac{5}{2}$$

$$\boxed{v_n = \frac{-3}{2} 2^n - 1}$$

6. Enfin la formule définissant  $v_n$  permet aussi de retrouver  $u_n$  en fonction de  $v_n$  :

$$\begin{aligned} v_n &= \frac{2u_n - 1}{-u_n + 1} \\ \Leftrightarrow v_n(-u_n + 1) &= 2u_n - 1 \\ \Leftrightarrow -v_n u_n + v_n &= 2u_n - 1 \\ \Leftrightarrow u_n(-v_n - 2) &= -v_n - 1 \\ \Leftrightarrow u_n &= \frac{-v_n - 1}{-v_n - 2} \\ \Leftrightarrow u_n &= \frac{v_n + 1}{v_n + 2} \end{aligned}$$

Ainsi

$$u_n = \frac{\frac{-3}{2} 2^n + 1 - 1}{\frac{-3}{2} 2^n - 1 + 2}$$

Après simplifications :

$$\boxed{u_n = \frac{3 \times 2^{n-1}}{3 \times 2^{n-1} - 1}}$$

**Exercice 5.** Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  on pose

$$C_n = \sum_{k=0}^n \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) \quad \text{et} \quad S_n = \sum_{k=0}^n \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$$

On cherche dans ce problème à calculer  $C_n$  et  $S_n$  en fonction de  $n$ .

On définit pour tout  $x \in ]0, 2\pi[$  :

$$Z_n(x) = \sum_{k=0}^n e^{ikx}.$$

- Calculer  $S_4$ .
- Quel est le lien entre  $C_n, S_n$  et  $Z_n(\frac{\pi}{n})$  ?
- Montrer par récurrence que

$$Z_n(x) = \frac{1 - e^{(n+1)ix}}{1 - e^{ix}}.$$

- Montrer que

$$Z_n\left(\frac{\pi}{n}\right) = \frac{1 + e^{i\frac{\pi}{n}}}{1 - e^{i\frac{\pi}{n}}} = \frac{1}{-i \tan\left(\frac{\pi}{2n}\right)}$$

- En déduire que :  $S_n = \frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{2n}\right)}$ . Que vaut  $C_n$  ?

- En déduire la valeur de  $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)$ .

- Rappeler la valeur de  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(x)}{x}$

- En déduire que

$$S_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{2n}{\pi}$$

### Correction 5.

- Comme la question est posée il faut faire la récurrence. Si la question demandée seulement de "justifier l'égalité" on aurait pu écrire :

On reconnaît une somme d'une suite géométrique de raison  $e^{ix}$ . Comme  $e^{ix} \neq 1$  (car  $x \in ]0, 2\pi[$ ) on a

$$\begin{aligned} Z_n(x) &= \sum_{k=0}^n (e^{ix})^k \\ &= \frac{1 - (e^{ix})^{(n+1)}}{1 - e^{ix}} \\ &= \frac{1 - e^{i(n+1)x}}{1 - e^{ix}} \end{aligned}$$

- D'après la question 1, on a :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n e^{ik\frac{\pi}{n}} &= \frac{1 - e^{i(n+1)\frac{\pi}{n}}}{1 - e^{i\frac{\pi}{n}}} \\ &= \frac{1 - e^{i\pi + i\frac{\pi}{n}}}{1 - e^{i\frac{\pi}{n}}} \\ &= \frac{1 + e^{i\frac{\pi}{n}}}{1 - e^{i\frac{\pi}{n}}} \\ &= \frac{e^{i\frac{\pi}{2n}} \left( e^{-i\frac{\pi}{2n}} + e^{i\frac{\pi}{2n}} \right)}{e^{i\frac{\pi}{2n}} \left( e^{-i\frac{\pi}{2n}} - e^{i\frac{\pi}{2n}} \right)} \\ &= \frac{\left( e^{-i\frac{\pi}{2n}} + e^{i\frac{\pi}{2n}} \right)}{\left( e^{-i\frac{\pi}{2n}} - e^{i\frac{\pi}{2n}} \right)} \\ &= \frac{2 \cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)}{-2i \sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)} \\ &= \frac{1}{-i \tan\left(\frac{\pi}{2n}\right)} \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}\Im(Z(\frac{\pi}{n})) &= \Im\left(\frac{1}{-i \tan(\frac{\pi}{2n})}\right) \\ &= \Im\left(\frac{i}{\tan(\frac{\pi}{2n})}\right) \\ &= \boxed{\frac{1}{\tan(\frac{\pi}{2n})}}\end{aligned}$$

et

$$\boxed{\Re(Z(\frac{\pi}{n})) = 0}$$

4.

$$\sum_{k=0}^n \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \sin\left(\frac{0\pi}{n}\right) + \sum_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) + \sin\left(\frac{n\pi}{n}\right)$$

Or  $\sin\left(\frac{0\pi}{n}\right) = 0$  et  $\sin\left(\frac{n\pi}{n}\right) = \sin(\pi) = 0$ . Donc

$$\boxed{S_n = \sum_{k=0}^n \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) .}$$

5.

$$\begin{aligned}\Im(Z(x)) &= \Im\left(\sum_{k=0}^n e^{ikx}\right) \\ &= \sum_{k=0}^n \Im(e^{ikx}) \\ &= \sum_{k=0}^n \sin(kx)\end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{S_n = \Im(Z(\frac{\pi}{n}))}$$

6. C'est une conséquence directe de la question 3 et de la question précédente.

7. On a d'après la question précédente  $\frac{1}{\tan(\frac{\pi}{8})} = S_4$  Donc  $\tan(\frac{\pi}{8}) = \frac{1}{S_4}$ .

$$\text{Par ailleurs } S_4 = \sum_{k=1}^3 \sin\left(\frac{k\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{1\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} = 1 + \sqrt{2}.$$

Donc

$$\boxed{\tan(\frac{\pi}{8}) = \frac{1}{1+\sqrt{2}}}$$

8. Montrons que  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(x)}{x} = 1$ . On a en effet pour tout  $x \in ]-\pi/2, \pi/2[$  :

$$\begin{aligned}\tan'(x) &= \frac{\sin'(x) \cos(x) - \cos'(x) \sin(x)}{\cos^2(x)} \\ &= \frac{\sin^2(x) + \cos^2(x)}{\cos^2(x)} \\ &= \frac{1}{\cos^2(x)}\end{aligned}$$

En particulier  $\tan'(0) = 1$  et par définition de la dérivée en 0 :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(x) - \tan(0)}{x - 0} = \tan'(0) = 1$$

On a  $\frac{S_n}{n} = \frac{1}{n \tan(\frac{\pi}{2n})}$ , et

$$\begin{aligned} n \tan\left(\frac{\pi}{2n}\right) &= \frac{\tan\left(\frac{\pi}{2n}\right)}{\frac{1}{n}} \\ &= \frac{\frac{\pi}{2} \tan\left(\frac{\pi}{2n}\right)}{\frac{\pi}{2n}} \end{aligned}$$

On vient de voir que  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(x)}{x} = 1$ , comme  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{2n} = 0$  on a par composé de limites :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \tan\left(\frac{\pi}{2n}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

En conclusion :

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n} = \frac{2}{\pi}.}$$

## INFORMATIQUE

**Exercice 6.** Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie par  $u_0 = 1, u_1 = 3$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$

$$u_{n+2} = u_{n+1}^2 + 3u_n$$

1. Ecrire une fonction python `suite_u` qui prend en argument un entier  $n$  et retourne la valeur de  $u_n$
2. Ecrire une fonction python `somme` qui prend en argument un entier  $n$  et retourne la valeur de  $\sum_{k=0}^n u_k$
3. Ecrire une fonction python `limites` qui prend en argument un flottant  $A$  et retourne le premier entier  $n$  tel que  $u_n > A$

### Correction 6.

1. 

```
def suite_u(n):
    u,v=1,3
    for i in range(n):
        u,v=v, v**2+3*u
    return(u)
```
2. 

```
def somme(n):
    s=0
    for i in range(n+1):
        s=s+suite_u(i)
    return(s)
```
3. 

```
def limites(A):
    n=0
    while suite_u(n)<=A:
        n=n+1
    return(n)
```



**Exercice 7.** Soit  $f$  la fonction définie par  $f(x) = x - \sqrt{2x+1}$

1. Donner les variations de  $f$  sur son ensemble de définition
2. Ecrire une fonction python `f` qui prend en argument un flottant `x` et retourne "erreur" si  $x$  n'est pas dans l'ensemble de définition de  $f$  et  $f(x)$  sinon.
3. On dispose de la fonction mystère suivante :

```
def mystere(x,y):  
    if f(x)=="erreur" or f(y)=="erreur" :  
        return( "probleme de variable")  
    elif f(x) <= f(y):  
        return(x)  
    else:  
        return(y)
```

Qu'affiche la console avec les instructions suivantes - on justifiera brièvement :

- (a) `print(mystere(-1,2))`
- (b) `print(mystere(0,2))`
- (c) `print(mystere(0,-0.5))`
- (d) `print(mystere(999,1001))`

### Correction 7.

1.  $f$  est définie sur  $[-\frac{1}{2}, +\infty[$  et dérivable sur  $]-\frac{1}{2}, +\infty[$  et on a pour tout  $x \in ]-\frac{1}{2}, +\infty[$  :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 - \frac{1}{\sqrt{2x+1}} \\ &= \frac{\sqrt{2x+1} - 1}{\sqrt{2x+1}} \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} f'(x) > 0 &\iff \sqrt{2x+1} - 1 > 0 \\ &\iff \sqrt{2x+1} > 1 \\ &\iff 2x+1 > 1 \quad \text{Car les deux membres sont positifs} \\ &\iff 2x > 0 \\ &\iff x > 0 \end{aligned}$$

$f$  est décroissante sur  $[-\frac{1}{2}, 0]$  et croissante sur  $[0, +\infty[$

2. 

```
def f(x):  
    if x<-0.5:  
        return( 'erreur')  
    else:  
        return x-(2*x+1)**0.5
```
3.
  - (a) La console retourne 'erreur' car  $-1$  n'est pas dans l'ensemble de définition.
  - (b) La console retourne 0 car  $f(0) \leq f(2)$ .
  - (c) La console retourne 0 car  $f(0) \leq f(-0.5)$ .
  - (d) La console retourne 999 car  $f(999) \leq f(1001)$  d'après l'étude de fonction.