DS1

3h00

- Les calculatrices sont interdites durant les cours, TD et *a fortiori* durant les DS de mathématiques.
- Si vous pensez avoir découvert une erreur, indiquez-le clairement sur la copie et justifiez les initiatives que vous êtes amené·e ·s à prendre.
- Une grande attention sera apportée à la clarté de la rédaction et à la présentations des solutions. (Inscrivez clairement en titre le numéro de l'exercice, vous pouvez aussi encadrer les réponses finales.)
- Vérifiez vos résultats.
- Le résultat d'une question peut être admis et utilisé pour traiter les questions suivantes en le signalant explicitement sur la copie.

Exercice 1. A l'aide d'une étude de fonction montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$e^x \geq x + 1$$

Exercice 2. On considère les deux propositions suivantes :

$$P_1(f) : "\exists A \in \mathbb{R},\ \forall x > A,\ f(x) \leq f(A)"$$

$$P_2(f) : "\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, y = f(x)"$$

1. Donner les négations de ces propriétés.
2. Dire si ces propositions ou leur négation sont vraies pour les fonctions suivantes :

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 1 \end{array} \right. , \quad g \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x-1 \end{array} \right. , \quad h \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 1-x^2 \end{array} \right.$$

   On justifiera en donnant une valeur pour les variables quantifiées par le quantificateur $\exists$.

Exercice 3. On souhaite résoudre l'équation suivante :

$$(E) \quad : \quad e^{2x} - 2e^x + 2e^{-x} \geq 1$$

d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

1. On pose $X = e^x$. Montrer que x est solution de (E) si et seulement si X est strictement positif et solution de
$$(E') \quad : \quad X^3 - 2X^2 - X + 2 \geq 0$$
2. Montrer que 1 est racine de $X^3 - 2X^2 - X + 2$.
3. Résoudre (E')
4. En déduire les solutions de (E)

Exercice 4. On note $\Delta(m) = m^2 - 8m + 12$.

1. Résoudre l'inéquation d'inconnue m :
$$\Delta(m) > 0 \qquad (I_1)$$
2. On note $r_+(m) = \frac{m+\sqrt{\Delta(m)}}{4}$ et $r_-(m) = \frac{m-\sqrt{\Delta(m)}}{4}$.
   Quel est le domaine de définition de r_+ et r_- ?
3. Résoudre
$$r_+(m) \geq 1 \quad \text{et} \quad r_-(m) \geq 1.$$
4. Résoudre l'inéquation d'inconnue y et de paramétre $m \in \mathbb{R}$
$$\frac{2y^2 - \frac{3}{2}}{y-1} \geq m \qquad (I_2(m))$$

Exercice 5. On considère les nombres réels $\alpha = \sqrt[3]{2+\sqrt{5}}$ et $\beta = \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$. On rappelle que pour tout réel y on note $\sqrt[3]{y}$ l'unique solution de l'équation $x^3 = y$ d'inconnue x.

Le but de l'exercice est de donner des expressions simplifiées de α et β.

1. (a) Calculer $\alpha\beta$ et $\alpha^3 + \beta^3$.
   (b) Vérifier que $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$, $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.
   (c) En déduire que $(\alpha+\beta)^3 = 4 - 3(\alpha+\beta)$
2. On pose $u = \alpha + \beta$ et on considère la fonction polynomiale $P : x \mapsto x^3 + 3x - 4$.
   (a) A l'aide de la question précédente montrer que u est une racine de P.
   (b) Trouver une autre racine « évidente » de P.
   (c) Trouver trois nombres réels a, b, et c tels que $\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = (x-1)(ax^2 + bx + c)$
   (d) Résoudre l'équation $P(x) = 0$ pour $x \in \mathbb{R}$.
   (e) En déduire la valeur de u.
3. On considère la fonction polynomiale $Q : x \mapsto Q(x) = (x-\alpha)(x-\beta)$
   (a) A l'aide des questions précédentes, développer et simplifier $Q(x)$ pour tout nombre réel x.
   (b) En déduire des expressions plus simples de α et β.