DS2

3h00

- Les calculatrices sont interdites durant les cours, TD et *a fortiori* durant les DS de mathématiques.
- Si vous pensez avoir découvert une erreur, indiquez-le clairement sur la copie et justifiez les initiatives que vous êtes amené·e ·s à prendre.
- Une grande attention sera apportée à la clarté de la rédaction et à la présentations des solutions. (Inscrivez clairement en titre le numéro de l'exercice, vous pouvez aussi encadrer les réponses finales.)
- Vérifiez vos résultats.
- Le résultat d'une question peut être admis et utilisé pour traiter les questions suivantes en le signalant explicitement sur la copie.

Exercice 1. On cherche à résoudre l'équation suivante :

$$\sin(3x) - \sin(x) \geq 0 \quad (E)$$

1. Dire si $\frac{\pi}{3}$ et $\frac{5\pi}{6}$ sont solutions de (E)
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\sin(3x) = 3\sin(x) - 4\sin^3(x)$$

3. Résoudre $-2X^3 + X \geq 0$
4. En déduire les solutions de (E) sur $[0, 2\pi[$.

Exercice 2. 1. A quelle condition sur $X, Y \in \mathbb{R}$ a-t-on

$$X = Y \iff X^2 = Y^2$$

2. On souhaite résoudre dans $[-\pi, \pi[$ l'équation :

$$(1) \qquad |\cos(x)| = |\sin(x)|.$$

   Montrer que (1) est équivalent à l'équation

$$(E) \qquad \cos(2x) = 0.$$

3. Résoudre (E) sur $\mathbb{R}$ et en déduire les solutions de (1) sur $[-\pi, \pi[$ et représenter les solutions sur le cercle trigonométrique.

Exercice 3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 3, u_1 = 6$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$u_{n+2} = 2u_{n+1} + u_n$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n \geq 3 \times 2^n$

Exercice 4. 1. En justifiant proprement chaque étape de calcul, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{n} (k+1)^4 - k^4 = (n+1)^4.$$

2. Développer $(k+1)^4 - k^4$.
3. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

4. A l'aide des trois question précédentes, montrer qu'il existe un polynôme P de degré 3, tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{1}{4}(n+1)P(n).$$

   On déterminera explicitement $P(n)$

5. En déduire, finalement que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

Problème 1. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+n}$$

1. Calculer S_1 et S_2
2. A l'aide d'un changement de variable montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}$$

3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=n}^{2n} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) = \ln\left(\frac{2n+1}{n}\right)$$

4. En déduire la limite de $\displaystyle\sum_{k=n}^{2n} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)$.
5. A l'aide d'une étude de fonction, montrer que pour tout $x \geq 0$:

$$x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x)$$

   On pose $e_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{2k^2}$.
6. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$S_n \leq e_n + \sum_{k=n}^{2n} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)$$

7. On va montrer ensuite que $(e_n)_{n\geq 1}$ tend vers 0.
   (a) Justifier (brièvement) que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $e_n \geq 0$.
   (b) On note $E_n = \{\frac{1}{2k^2} \mid k \in [\![n, 2n]\!]\}$
      i. Donner en fonction de n le nombre d'éléments de E_n.
      ii. Donner en fonction de n la plus grande valeur des éléments de E_n.
   (c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $e_n \leq \frac{n+1}{2n^2}$.
   (d) Conclure.

Remarque : Avec l'inégalité $\forall x > 0, \ln(1+x) \leq x$, on peut montrer que $\displaystyle\sum_{k=n}^{2n} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) \leq S_n$ et ainsi en déduire la limite de $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à l'aide du théorème d'encadrement.

Informatique

Exercice 5. Que retournent les scripts suivants :

Script 1

```
a=1
b=1
c=a+b
a=0
if c==b:
    a=1
else:
    a=2
print(a,c)
```

Script 2

```
a=2
b=a**3
c=a-b
if c>3:
    print(2)
elif a<=2:
    print(1)
else:
    print('coucou')
```

Script 3

```
a=1
b=a*2
a=b
b=b+a
print(a,b)
```

Script 4

```
a=1
for i  in range(5):
    if i%2==0:
        a=a+1
print(a)
```

Exercice 6.

1. Ecrire une fonction `discriminant` qui prend en argument trois nombres a, b et c et retourne la valeur du discriminant du polynome $ax^2 + bx + c$
2. Écrire une fonction `trinome` qui prend en argument trois nombres a, b et c et renvoie la valeur de(s) (la) solution(s) de $ax^2 + bx + c = 0$ si il en existe et renvoie la phrase 'pas de solution réelle' sinon.

Exercice 7. Ecrire une fonction Python `Somme` qui prend en argument un entier n et retourne la valeur de la somme $\sum_{k=0}^{n} k^5$