Correction DS3

Exercice 1. 1. Soit $z \in \mathbb{C}$. Rappeler le lien entre z, $\overline{z}$ et $|z|$ d'une part, et entre z, $\overline{z}$ et $Re(z)$ d'autre part.

2. En déduire que pour tout $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$ on a :

$$|z_1 - z_2|^2 = |z_1|^2 - 2Re(z_1 z_2) + |z_2|^2$$

Correction 1.

1. $z\overline{z} = |z|^2$, $|z\overline{z}| = |z|^2$, $z + \overline{z} = 2Re(z)$
2.

$$\begin{aligned} |z - z'|^2 &= (z - z')\overline{(z - z')} \\ &= (z - z')(\overline{z} - \overline{z'}) \\ &= z\overline{z} - z'\overline{z} - z\overline{z'} + z'\overline{z'} \\ &= |z|^2 - (z'\overline{z} + z\overline{z'}) + |z'|^2 \\ &= |z|^2 - (z'\overline{z} + \overline{z'\overline{z}}) + |z'|^2 \\ &= |z|^2 - 2Re(z'\overline{z}) + |z'|^2 \end{aligned}$$

Exercice 2. On considère la relation de récurrence :

$$(R) : \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n + 1$$

Soit (u_n) vérifiant (R), et $u_0 = 1$, $u_1 = 3$.

1. Déterminer une suite (v_n) vérifiant (R) de la forme : $v_n = an + b$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.
2. On pose alors $w_n = u_n - v_n$. Montrer que (w_n) vérifie :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ w_{n+2} = 3w_{n+1} - 2w_n$$

3. En déduire l'expression de w_n en fonction de n.
4. Donner alors l'expression de u_n en fonction de n.

Correction 2.

1. Remplaçons dans (R) l'expression de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.On obtient

$$a(n + 2) + b = 3(a(n + 1) + b) - 2(an + b) + 1$$

Ce qui donne après simplification

$$2a + b = 3a + b + 1$$

d'où

$$a = -1$$

Il n'y a pas de condition sur b.

$$\boxed{\text{On peut ainsi voir que la suite } v_n = -n \text{ vérifie } (R)}$$

2. D'après la définition de $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on a

$$\begin{aligned} w_{n+2} &= u_{n+2} - v_{n+2} \\ &= 3u_{n+1} - 2u_n + 1 - (3v_n + 1 - 2v_n + 1) \\ &= 3(u_{n+1} - v_{n+1}) - 2(u_n - v_n) \\ &= 3w_{n+1} - 2w_n \end{aligned}$$

$$\boxed{(w_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ vérifie la relation de SRL2 demandée}}$$

3. Soit $P(X) = X^2 - 3X + 2$ le polynôme caractéristique de $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$. $P(X)$ admet deux racines 1 et 2. Donc $\exists (A, B) \in \mathbb{R}^2$, $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$w_n = A2^n + B1^n = A2^n + B$$

De plus on a d'une part $w_0 = u_0 - v_0 = 1 - 0 = 1$ et $w_1 = u_1 - v_1 = 3 - (-1) = 4$ et d'autre part $w_0 = A + B$ et $w_1 = 2A + B$ On obtient ainsi le système

$$\begin{cases} A + B &= 1 \\ 2A + B &= 4 \end{cases}$$

On obtient après résolution

$$A = 3 \quad \text{et} \quad B = -2$$

$$\boxed{w_n = 3 * 2^n - 2}$$

4. Comme $w_n = u_n - v_n$ on a $u_n = w_n + v_n$ donc

$$\boxed{u_n = 3 * 2^n - 2 - n}$$

Exercice 3. Pour tout complexe z, on considère : $f(z) = z^4 - 2z^3 + 6z^2 - 8z + 8$

1. Soit $b \in \mathbb{R}$, exprimer en fonction de b les parties réelles et imaginaires de $f(ib)$.
2. En déduire que l'équation $f(z) = 0$ admet deux solutions imaginaires pures. Quel lien y a-t-il entre ces solutions ?
3. Démontrer qu'il existe deux réels α et β tels que pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$f(z) = (z^2 + 4)(z^2 + \alpha z + \beta)$$

4. Résoudre alors $f(z) = 0$ dans $\mathbb{C}$.

Correction 3.

1.

$$\begin{aligned} f(ib) &= (ib)^4 - 2(ib)^3 + 6(ib)^2 - 8(ib) + 8 && (1) \\ &= b^4 + 2ib^3 - 6b^2 - 8ib + 8 && (2) \\ &= b^4 - 6b^2 + 8 + i(2b^3 - 8b) && (3) \end{aligned}$$

$$\boxed{Re(f(ib)) = b^4 - 6b^2 + 8 \text{ et } Im(f(ib) = 2b^3 - 8b}$$

2. D'après la question précédente $f(ib) = 0 \iff b^4 - 6b^2 + 8 = 0 \quad$ et $\quad c$ On a les factorisations suivantes :

$$\begin{aligned} 2b^3 - 8b &= 2b(b^2 - 4) \\ &= 2b(b-2)(b+2) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} b^4 - 6b^2 + 8 &= (b^2 - 4)(b^2 - 2) \\ &= (b-2)(b+2)(b-\sqrt{2})(b+\sqrt{2}) \end{aligned}$$

Donc

$$b^4 - 6b^2 + 8 = 0 \iff b \in \{2, -2, \sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$$

et

$$2b^3 - 8b = 0 \iff b \in \{2, -2\}$$

Ainsi

$$f(ib) = 0 \iff b \in \{2, -2\}$$

$\boxed{f(z) \text{ admet deux solutions imaginaires pures : } 2i, \text{ et } -2i. \text{ Ces solutions sont conjuguées l'une de l'autre}}$

3. $(z^2+4)(z^2+\alpha z+\beta) = z^4 + \alpha z^3 + (4+\beta)z^2 + 4\alpha z + 4\beta$
   En identifiant on obtient

$$\boxed{\alpha = -2 \text{ et } \beta = 2}$$

4. $z^2 - 2z + 2$ admet comme discriminant $\Delta = 4 - 8 = -4$ et donc comme racine :

$$r_1 = \frac{2+2i}{2} = 1+i \quad \text{et} \quad r_2 = 1-i$$

   L'ensemble des solutions de $f(z) = 0$ est donc

$$\boxed{\mathcal{S} = \{2i, -2i, 1+i, 1-i\}}$$

Exercice 4. On définit deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ par

$$u_0 = 3 \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{2u_n}{u_n+1} \quad v_n = \frac{2u_n - 1}{-u_n+1}$$

1. **Python :** Ecrire une fonction Python qui prend en argument un entier n et retourne la valeur de u_n et v_n.
2. Résoudre $\dfrac{2x}{x+1} > 1$
3. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 1$ et en déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont bien définies.
4. Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$v_{n+1} = 2v_n + 1$$

5. Donner l'expression de v_n en fonction de n.
6. En déduire l'expression de u_n en fonction de n.

Correction 4.

1.
2.

$$\begin{aligned}\frac{2x}{x+1} &> 1\\ \frac{2x}{x+1}-1 &> 0\\ \frac{x-1}{x+1} &> 0\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est donc

$$\boxed{\mathcal{S} =]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[}$$

3. Soit $P(n)$ la propriété $P(n) :=$ "$u_n > 1$". Remarquons tout d'abord que si on prouve $P(n)$ alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont bien définies car $P(n)$ implique que $u_n \neq -1$ et $-u_n \neq +1$. On va prouver $P(n)$ par récurrence.

   Initialisation : $P(0)$ est vraie d'après l'énoncé, en effet $u_0 = 3 > 1$

   Hérédité : Supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$, tel que $P(n)$ soit vraie. On a alors $u_n > 1$. D'après la question précédente, on a donc que $\frac{2u_n}{u_n+1} > 1$ car $u_n \in \mathcal{S}$
   Ainsi
   $$u_{n+1} > 1$$
   ce qui prouve $P(n+1)$.

   Conclusion : $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$

4. On a d'une part

$$\begin{aligned}v_{n+1} &= \frac{2u_{n+1}-1}{-u_{n+1}+1}\\ &= \frac{2\frac{2u_n}{u_n+1}-1}{-\frac{2u_n}{u_n+1}+1}\\ &= \frac{4u_n-u_n-1}{-2u_n+u_n+1}\\ &= \frac{3u_n-1}{-u_n+u_n+1}\end{aligned}$$

et d'autre part

$$\begin{aligned}2v_n+1 &= 2\frac{2u_n-1}{-u_n+1}+1\\ &= \frac{4u_n-2-u_n+1}{-u_n+1}\\ &= \frac{3u_n-1}{-u_n+1}\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{On obtient bien } v_{n+1} = 2v_n+1}$$

5. On reconnait une suite arithmético-géométrique. On utilise donc une suite auxiliaire :

$$w_n = v_n - \alpha$$

où $\alpha \in \mathbb{R}$ est un réel à déterminer afin que $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit géométrique.

$$\begin{aligned} w_{n+1} &= v_{n+1} - \alpha \\ &= 2v_n + 1 - \alpha \\ &= 2(w_n + \alpha) + 1 - \alpha \\ &= 2w_n + \alpha + 1 \end{aligned}$$

On choisit donc $\alpha = -1$ et alors $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison 2. Le cours donne $w_n = w_0 2^n$. Ce qui donne pour

$$v_n = (v_0 - \alpha)2^n + \alpha$$

Il reste à calculer v_0, avec la formule définissant v_n :

$$v_0 = \frac{2u_0 - 1}{-u_0 + 1} = -\frac{5}{2}$$

$$\boxed{v_n = \frac{-3}{2}2^n - 1}$$

6. Enfin la formule définissant v_n permet aussi de retrouver u_n en fonction de v_n :

$$\begin{aligned} & v_n = \frac{2u_n - 1}{-u_n + 1} \\ \iff & v_n(-u_n + 1) = 2u_n - 1 \\ \iff & -v_n u_n + v_n = 2u_n - 1 \\ \iff & u_n(-v_n - 2) = -v_n - 1 \\ \iff & u_n = \frac{-v_n - 1}{-v_n - 2} \\ \iff & u_n = \frac{v_n + 1}{v_n + 2} \end{aligned}$$

Ainsi

$$u_n = \frac{\frac{-3}{2}2^n + 1 - 1}{\frac{-3}{2}2^n - 1 + 2}$$

Apres simplifications :

$$\boxed{u_n = \frac{3 \times 2^{n-1}}{3 \times 2^{n-1} - 1}}$$

Exercice 5. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose

$$C_n = \sum_{k=0}^{n} \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) \quad \text{et} \quad S_n = \sum_{k=0}^{n} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$$

On cherche dans ce problème à calculer C_n et S_n en fonction de n.
On définit pour tout $x \in]0, 2\pi[$:

$$Z_n(x) = \sum_{k=0}^{n} e^{ikx}.$$

1. Calculer S_4.

2. Quel est le lien entre C_n, S_n et $Z_n(\frac{\pi}{n})$?
3. Montrer par récurrence que
$$Z_n(x) = \frac{1-e^{(n+1)ix}}{1-e^{ix}}.$$
4. Montrer que
$$Z_n(\frac{\pi}{n}) = \frac{1+e^{i\frac{\pi}{n}}}{1-e^{i\frac{\pi}{n}}} = \frac{1}{-i\tan(\frac{\pi}{2n})}$$
5. En déduire que : $S_n = \dfrac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{2n}\right)}$. Que vaut C_n ?
6. En déduire la valeur de $\tan\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$.
7. Rappeler la valeur de $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan(x)}{x}$
8. En déduire que
$$S_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{2n}{\pi}$$

Correction 5.

1. Comme la question est posée il faut faire la récurrence. Si la question demandée seulement de "justifier l'égalité" on aurait pu écrire :
On reconnaît une somme d'une suite géométrique de raison e^{ix}. Comme $e^{ix} \neq 1$ (car $x \in]0, 2\pi[$) on a
$$\begin{aligned} Z_n(x) &= \sum_{k=0}^{n} (e^{ix})k \\ &= \frac{1-(e^{ix})^{(n+1)}}{1-e^{ix}} \\ &= \frac{1-e^{i(n+1)x}}{1-e^{ix}} \end{aligned}$$
2. D'après la question 1, on a :
$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} e^{ik\frac{\pi}{n}} &= \frac{1-e^{i(n+1)\frac{\pi}{n}}}{1-e^{i\frac{\pi}{n}}} \\ &= \frac{1-e^{i\pi+i\frac{\pi}{n}}}{1-e^{i\frac{\pi}{n}}} \\ &= \frac{1+e^{i\frac{\pi}{n}}}{1-e^{i\frac{\pi}{n}}} \\ &= \frac{e^{i\frac{\pi}{2n}}\left(e^{-i\frac{\pi}{2n}}+e^{i\frac{\pi}{2n}}\right)}{e^{i\frac{\pi}{2n}}\left(e^{-i\frac{\pi}{2n}}-e^{i\frac{\pi}{2n}}\right)} \\ &= \frac{\left(e^{-i\frac{\pi}{2n}}+e^{i\frac{\pi}{2n}}\right)}{\left(e^{-i\frac{\pi}{2n}}-e^{i\frac{\pi}{2n}}\right)} \\ &= \frac{2\cos(\frac{\pi}{2n})}{-2i\sin(\frac{\pi}{2n})} \\ &= \frac{1}{-i\tan(\frac{\pi}{2n})} \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}\mathfrak{Im}(Z(\frac{\pi}{n})) &= \mathfrak{Im}(\frac{1}{-i\tan(\frac{\pi}{2n})})\\ &= \mathfrak{Im}(\frac{i}{\tan(\frac{\pi}{2n})})\\ &= \boxed{\frac{1}{\tan(\frac{\pi}{2n})}}\end{aligned}$$

et

$$\boxed{\mathfrak{Re}(Z(\tfrac{\pi}{n}))=0}$$

4.

$$\sum_{k=0}^{n}\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)=\sin\left(\frac{0\pi}{n}\right)+\sum_{k=1}^{n-1}\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)+\sin\left(\frac{n\pi}{n}\right)$$

Or $\sin\left(\frac{0\pi}{n}\right)=0$ et $\sin\left(\frac{n\pi}{n}\right)=\sin(\pi)=0$. Donc

$$\boxed{S_n=\sum_{k=0}^{n}\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right).}$$

5.

$$\begin{aligned}\mathfrak{Im}(Z(x)) &= \mathfrak{Im}\left(\sum_{k=0}^{n}e^{ikx}\right)\\ &= \sum_{k=0}^{n}\mathfrak{Im}(e^{ikx})\\ &= \sum_{k=0}^{n}\sin(kx))\end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{S_n=\mathfrak{Im}(Z(\tfrac{\pi}{n}))}$$

6. C'est une conséquence directe de la question 3 et de la quesstion précédente.
7. On a d'après la question précédente $\frac{1}{\tan(\frac{\pi}{8})}=S_4$ Donc $\tan(\frac{\pi}{8})=\frac{1}{S_4}$.

   Par ailleurs $S_4=\displaystyle\sum_{k=1}^{3}\sin\left(\frac{k\pi}{4}\right)=\sin\left(\frac{1\pi}{4}\right)+\sin\left(\frac{2\pi}{4}\right)+\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}+1+\frac{\sqrt{2}}{2}=1+\sqrt{2}$.

   Donc

$$\boxed{\tan(\tfrac{\pi}{8})=\tfrac{1}{1+\sqrt{2}}}$$

8. Montrons que $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\tan(x)}{x}=1$. On a en effet pour tout $x\in]-\pi/2,\pi/2[$:

$$\begin{aligned}\tan'(x) &= \frac{\sin'(x)\cos(x)-\cos'(x)\sin(x)}{\cos^2(x)}\\ &= \frac{\sin^2(x)+\cos^2(x)}{\cos^2(x)}\\ &= \frac{1}{\cos^2(x)}\end{aligned}$$

En particulier $\tan'(0) = 1$ et par définition de la dérivée en 0 :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\tan(x) - \tan(0)}{x - 0} = \tan'(0) = 1$$

On a $\frac{S_n}{n} = \frac{1}{n\tan(\frac{\pi}{2n})}$, et

$$\begin{aligned} n\tan(\frac{\pi}{2n}) &= \frac{\tan(\frac{\pi}{2n})}{\frac{1}{n}} \\ &= \frac{\frac{\pi}{2}\tan(\frac{\pi}{2n})}{\frac{\pi}{2n}} \end{aligned}$$

On vient de voir que $\lim_{x\to 0} \frac{\tan(x)}{x} = 1$, comme $\lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{2n} = 0$ on a par composé de limites :

$$\lim_{n\to\infty} n\tan(\frac{\pi}{2n}) = \frac{\pi}{2}.$$

En conclusion :

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = \frac{2}{\pi}.}$$

INFORMATIQUE

Exercice 6. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1, u_1 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$u_{n+2} = u_{n+1}^2 + 3u_n$$

1. Ecrire une fonction python `suite_u` qui prend en argument un entier n et retourne la valeur de u_n
2. Ecrire une fonction python `somme` qui prend en argument un entier n et retournela valeur de $\sum_{k=0}^{n} u_k$
3. Ecrire une fonction python `limites` qui prend en argument un flottant A et retourne le premier entier n tel que $u_n > A$

Correction 6.

1.
2.
3.

Exercice 7. Soit f la fonction définie par $f(x) = x - \sqrt{2x+1}$

1. Donner les variations de f sur son ensemble de définition
2. Ecrire une fonction python `f` qui prend en argument un flottant `x` et retourne "erreur" si x n'est pas dans l'ensemble de définition de f et $f(x)$ sinon.
3. On dispose de la fonction mystère suivante :
   Qu'affiche la console avec les instructions suivantes - on justifiera brièvement :
   (a) `print(mystere(-1,2))`
   (b) `print(mystere(0,2))`
   (c) `print(mystere(0,-0.5))`
   (d) `print(mystere(999,1001))`

Correction 7.

1. f est définie sur $[\frac{-1}{2}, +\infty[$ et dérivable sur $]\frac{-1}{2}, +\infty[$ et on a pour tout $x \in]\frac{-1}{2}, +\infty[$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 - \frac{1}{\sqrt{2x+1}} \\ &= \frac{\sqrt{2x+1}-1}{\sqrt{2x+1}} \end{aligned}$$

   Ainsi

$$\begin{aligned} f'(x) > 0 &\iff \sqrt{2x+1} - 1 > 0 \\ &\iff \sqrt{2x+1} > 1 \\ &\iff 2x + 1 > 1 \quad \text{Car les deux membres sont positifs} \\ &\iff 2x > 0 \\ &\iff x > 0 \end{aligned}$$

$$\boxed{f \text{ est décroissante sur } [\tfrac{-1}{2}, 0] \text{ et croissante sur } [0, +\infty[}$$

3. (a) La console retourne 'erreur' car -1 n'est pas dans l'ensemble de définition.
   (b) La console retourne 0 car $f(0) \leq f(2)$.
   (c) La console retourne 0 car $f(0) \leq f(-0.5)$.
   (d) La console retourne 999 car $f(999) \leq f(1001)$ d'après l'étude de fonction.