Correction DS4

Exercice 1. On considère deux droites du plans $D_1(\lambda)$ et $D_2(\lambda)$ qui dépendent d'un paramètre $\lambda \in \mathbb{R}$ et d'équations cartésiennes respectives :

$$D_1(\lambda) : \lambda x + y = 1 \quad \text{et} \quad D_1(\lambda) : x + \lambda y = -1$$

1. Résoudre le système d'inconnues $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} \lambda x + y & = 1 \\ x + \lambda y & = -1 \end{cases}$$

2. Soit Σ l'ensemble des valeurs pour lesquelles le système précédent n'est pas de Cramer. Que vaut Σ ?
3. Que dire des droites $D_1(\lambda)$ et $D_2(\lambda)$ si $\lambda \in \Sigma$?
4. Pour $\lambda \notin \Sigma$ justifier que l'unique point d'intersection de $D_1(\lambda)$ et $D_2(\lambda)$, noté M_λ, a pour coordonnées :

$$M_\lambda = \left(\frac{-1}{1-\lambda}, \frac{1}{1-\lambda} \right)$$

5. Soit $A = (0, 1)$ et $B = (-1, 0)$ deux points de $\mathbb{R}^2$. Justifier que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :

$$A \in D_1(\lambda) \quad \text{et} \quad B \in D_2(\lambda)$$

6. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, donner un vecteur directeur $u_1(\lambda)$ de $D_1(\lambda)$ et $u_2(\lambda)$ de $D_2(\lambda)$. A quelle(s) condition(s) sur λ les deux droites sont elles orthogonales ?
7. A quelle(s) condition(s) sur λ le triangle $AM_\lambda B$ est il rectangle en M_λ ?

Correction 1.

1. Résolvons le système proposé :

$$\begin{cases} \lambda x + y & = 1 \\ x + \lambda y & = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} x + \lambda y & = -1 \\ \lambda x + y & = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x + \lambda y & = -1 \\ (1-\lambda^2) y & = 1 - (-\lambda) \end{cases}$$

Le rang du système dépend de $\lambda \in \mathbb{R}$:

CAS 1 : $1 - \lambda^2 \neq 0$ autrement dit $\lambda \notin \{-1, 1\}$ Alors le système est de rang 2 et admet une unique solution :

$$\begin{cases} x + \lambda y & = -1 \\ y & = \frac{1+\lambda}{(1-\lambda^2)} \end{cases} \iff \begin{cases} x + \lambda y & = -1 \\ y & = \frac{1}{1-\lambda} \end{cases} \iff \begin{cases} x & = -1 - \frac{\lambda}{1-\lambda} \\ y & = \frac{1}{1-\lambda} \end{cases} \iff \begin{cases} x & = \frac{-1+\lambda-\lambda}{1-\lambda} \\ y & = \frac{1}{1-\lambda} \end{cases}$$

On obtient

$$\boxed{S = \{\left(\tfrac{-1}{1-\lambda}, \tfrac{1}{1-\lambda}\right)\}}$$

CAS 2 : $1 - \lambda^2 = 0$ autrement dit $\lambda \in \{-1, 1\}$ Le système est de rang 1

CAS 2.1 $\lambda = -1$ Le système est équivalent à

$$\begin{cases} x - y & = -1 \\ 0 & = 0 \end{cases}$$

On obtient

$$\boxed{S = \{(y-1, y) | y \in \mathbb{R})\}}$$

CAS 2.1 $\lambda = -1$ Le système est équivalent à

$$\begin{cases} x + y & = -1 \\ 0 & = 2 \end{cases}$$

On obtient

$$\boxed{S = \emptyset}$$

2. D'après la question précédente le système n'est pas de Cramer pour

$$\boxed{\Sigma = \{-1, 1\}}$$

3. Si $\lambda = -1$ les deux droites sont confondues. Si $\lambda = 1$ les deux droites sont parallèles.
4. C'est en effet l'unique solution du système composé des deux équations de droites.
5. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\lambda \times 0 + 1 = 1$$

donc $A \in D_1(\lambda)$

$$-1 + \lambda \times 0 = -1$$

donc $B \in D_2(\lambda)$

6. Un vecteur directeur de $D_1(\lambda)$ est

$$\boxed{u_1 = (-1, \lambda)}$$

Un vecteur directeur de $D_2(\lambda)$ est

$$\boxed{u_2 = (-\lambda, 1)}$$

Les deux droites sont orthogonales si et seulement si $u_1 \cdot u_2 = 0$ c'est à dire si

$$\lambda + = 0$$

$$\boxed{\text{Les deux droites sont orthogonales si et seulement si } \lambda = 0}$$

7. Comme $M_\lambda \in D_1(\lambda) \cap D_2(\lambda)$, et $A \in D_1(\lambda)$ et $B \in D_2(\lambda)$ on a $AM_\lambda B$ rectangle en M_λ si et seulement si $D_1(\lambda)$ et $D_2(\lambda)$ sont orthogonales c'est à dire

$$\boxed{AM_\lambda B \text{ rectangle en } M_\lambda \text{ si et seulement si } \lambda = 0}$$

Exercice 2. On définit la fonction f de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ par

$$\mathrm{f} : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & z^3 + z + 2 \end{array} \right.$$

1. Etude de la fonction f sur $\mathbb{C}$.
   (a) Vérifier que -1 est racine de f et en déduire toutes les racines de f sur $\mathbb{C}$.
   (b) La fonction f est elle injective ?
   (c) Question hors-programme de première année : quel théorème permet de justifier que f est surjective ? (à faire si on a fini le reste et si on a une idée, j'en ai parlé rapidement dans un cours)

2. On note g la restriction de la fonction f à $\mathbb{R}$:

$$g : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^3 + x + 2 \end{array} \right.$$

   (a) Etudier la fonction g.
   (b) Montrer que g réalise une bijection.

3. Etude de la réciproque. On note $g^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la bijection réciproque de g.
   (a) Comment obtenir la courbe représentative de g^{-1} à partir de celle de g.
   (b) Montrer que g^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $g^{-1}(2)$ et $(g^{-1})'(2)$

Correction 2.

1. (a) $f(-1) = -1 - 1 + 2 = 0$ donc -1 est racine de f. On peut donc factoriser f par $(z+1)$, on obtient
$$f(z) = (z+1)(z^2 - z + 2)$$
Le discriminant de $z^2 - z + 2$ vaut $\Delta = 1 - 8 = -7$ on obtient donc deux autres racines :
$$z_1 = \frac{1 - i\sqrt{7}}{2} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{1 + i\sqrt{7}}{2}$$
   (b) La fonction n'est pas injective car 0 admet 3 antécédents.
   (c) La fonction est surjective, c'est le théorème de D'alembert Gauss ! En effet soit $y \in \mathbb{C}$, on a $f(z) = y \iff z^3 + z + 2 - y = 0$ Or tout polynome admet au moins une racine dans $\mathbb{C}$, il existe donc z_1 tel que $z_1^3 + z_1 + 2 - y = 0$ autrement dit $f(z_1) = y$.
2. (a) g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a
$$f'(x) = x^2 + 1$$
Donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$
   (b) C'est une application du théorème de la bijection dont on vérifie les hypothèses :
      — f est continue sur $\mathbb{R}$
      — f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$(question précédente)
      — $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ (question précédente)
3. (a) C'est du cours : on fait la symétrie par rapport à la droite d'équation $y = x$
   (b) g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) \neq 0$. Donc g^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}$ et
$$(g^{-1})'(x) = \frac{1}{(g' \circ g^{-1})(x)}$$
$g^{-1}(2) = 0$ car $g(0) = 2$. Donc
$$g(g^{-1})'(2) = \frac{1}{(g' \circ g^{-1})(2)} = \frac{1}{g'(0)} = 1$$

Exercice 3. La concentration d'alcool (en $g.L^{-1}$) dans le sang d'une personne ayant absorbé, à jeun (autrement dit (y(0)=0)), une quantité Q d'alcool vérifie l'équation différentielle :

$$y'(t) + y(t) = \frac{Q}{6} e^{-2t} \quad (E)$$

où t est le temps écoulé après ingestion exprimé en heures.

On suppose qu'une personne ingère la quantité $Q = 24g$ d'alcool.

1. Résoudre l'équation différentielle (E) dans ce cas, on pourra chercher une solution particulière de la forme $y_p(t) = \lambda e^{-2t}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$ est à déterminer.
2. Résoudre $e^{-2t} - e^{-t} + \frac{1}{8} > 0$.
3. Exprimer en heure le temps qu'il faut pour que la personne (à jeun au début de l'expérience) possède un taux d'alcoolémie inférieur à $0.5gL^{-1}$. On répondra à l'aide d'un calcul littéral.

Correction 3.

1. On pose $X = e^{-t}$. t est solution de$e^{-2t} - e^{-t} + \frac{1}{8} > 0 \iff X$ est solution de $X^2 - X + \frac{1}{8}$
   On résout $X^2 - X + \frac{1}{8}$ à l'aide du discriminant : $\Delta = 1 - 4\frac{1}{8} = \frac{1}{2}$ On obtient deux racines réelles :
   $$X_1 = \frac{1 - \sqrt{\frac{1}{2}}}{2} \quad \text{et} \quad X_2 = \frac{1 + \sqrt{\frac{1}{2}}}{2}$$
   Qui se simplifient en
   $$X_1 = \frac{2 - \sqrt{2}}{4} \quad \text{et} \quad X_2 = \frac{2 + \sqrt{2}}{4}$$
   Ainsi les solutions de l'inéquation sont :
   $$\boxed{\mathcal{S} =]-\infty, X_1[\cup]X_2, +\infty[}$$
   Donc t est solution de
   $$e^{-2t} - e^{-t} + \frac{1}{8} > 0 \iff e^{-t} \in]-\infty, X_1[\cup]X_2, +\infty[$$
   Comme l'exponentielle est toujours positive cela équivaut à
   $$e^{-t} \in]0, X_1[\cup]X_2, +\infty[$$
   ce qui donne $-t \in]-\infty, \ln(X_1)[\cup] \ln(X_2), +\infty[$ et *in fine*
   $$\boxed{t \in]-\infty, -\ln(X_2)[\cup]-\ln(X_1), \infty[}$$
2. Soit (EH) l'équation homogène associée :
   $$y'(t) + y(t) = 0$$
   dont les solutions sont $y(t) = Ce^{-t}$, $C \in \mathbb{R}$
   On cherche ensuite une solution particulière de la forme $y_p(t) = \lambda e^{-2t}$
   $$y_p \text{ est solution de (E) si et seulement si } -2\lambda e^{-2t} + \lambda e^{-2t} = 4e^{-2t}$$
   On obtient
   $$\lambda = -4$$

Ainsi, les solutions de (E) sont de la forme :

$$y(t) = Ce^{-t} - 4e^{-2t}$$

On a supposé que la personne était à jeun au temps 0 donc $y(0) = 0$, on obtient ainsi que $C = 4$

Finalement la concentration d'alcool dans le sang de l'individu est donnée par la fonction

$$y(t) = 4(e^{-t} - e^{-2t})$$

On cherche désormais le temps t_0 tel que $y(t_0) < 0.5$. On est donc amené à résoudre l'inéquation

$$4(e^{-t} - e^{-2t}) < 0.5$$

C'est-à-dire

$$e^{-2t} - e^{-t} + \frac{1}{8} > 0$$

qui d'après la question 1 admet comme solution

$$\mathcal{S} =]-\infty, -\ln(X_2)[\cup] - \ln(X_1), \infty[$$

Ainsi on obtient $t_0 = -\ln(X_1) \simeq 1.9$

$$\boxed{\text{L'individu aura un taux d'alcoolémie inféreur à } 0.5g.L^{-1} \text{ après environ 2h}}$$

Exercice 4. On cherche à résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation différentielle :

$$x^2y'' - 3xy' + 4y = 0 \quad (E)$$

1. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ montrer que les fonctions de la forme $f(x) = ax^2 + bx^2\ln(x)$ sont solutions de E. (On mettra en valeurs les calculs de f' et f'')
2. Réciproquement on considère y une solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ et on cherche à montrer qu'elles sont bien de la forme précédente. Pour $t \in \mathbb{R}$, on pose $z(t) = y\left(e^t\right)$.
   (a) Calculer pour $t \in \mathbb{R}$, $z'(t)$ et $z''(t)$ en fonction de y et ses dérivées.
   (b) En déduire que z vérifie
   $$z'' - 4z' + 4z = 0.$$
   (c) Résoudre l'équation différentielle trouvée à la question précédente.
   (d) Conclure

Correction 4.

1. Dérivons deux fois la fonction $y(x) = ax^2 + bx^2\ln(x)$:

$$\begin{aligned} y'(x) &= 2ax + 2bx\ln(x) + bx^2\frac{1}{x} \\ &= 2ax + 2bx\ln(x) + bx \\ &= (2a + b)x + 2bx\ln(x) \end{aligned}$$

Puis

$$\begin{aligned} y''(x) &= (2a + b) + 2b\ln(x) + 2bx\frac{1}{x} \\ &= (2a + 3b) + 2b\ln(x) \end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned}
x^2y'' - 3xy' + 4y &= x^2\Big((2a+3b) + 2b\ln(x)\Big) - 3x\Big((2a+b)x + 2bx\ln(x)\Big) + 4\Big(ax^2 + bx^2\ln(x)\Big) \\
&= \Big((2a+3b)x^2 + 2bx^2\ln(x)\Big) - \Big((6a+3b)x^2 + 6bx^2\ln(x)\Big) + \Big(4ax^2 + 4bx^2\ln(x)\Big) \\
&= (2a+3b-6a-3b+4a)x^2 + (2b-6b+4b)x^2\ln(x) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Ainsi y est bien solution de (E)

2. (a) $z'(t) = e^t y'(e^t)$ et $z''(t) = e^t y'(e^t) + e^{2t}y''(e^t)$

   (b)

$$\begin{aligned}
z''(t) - 4z'(t) + 4z(t) &= e^t y'(e^t) + e^{2t}y''(e^t) - 4e^t y'(e^t) + 4y(e^t) \\
&= (e^t)^2 y''(e^t) - 3e^t y'(e^t) + 4y(e^t)
\end{aligned}$$

   Or pour tout $x > 0$ il existe t tel que $x = e^t$ et on a alors

$$(e^t)^2 y''(e^t) - 3e^t y'(e^t) + 4y(e^t) = x^2y''(x) - 3xy'(x) + 4y(x)$$

   Comme y est solution de (E) on a donc $x^2y''(x) - 3xy'(x) + 4y(x) = 0$ et finalement :

$$\boxed{z'' - 4z' + 4z = 0}$$

   (c) Soit $X^2 - 4X + 4 = 0$ l'équation caractéristique de associée à l'équation précédente. Cette équation admet une seule solution, à savoir, 2. Donc les solutions de $z'' - 4z' + 4z = 0$ sont

$$\boxed{\mathcal{S}_z = \{t \mapsto C_1e^{2t} + C_2te^{2t} \,|\, (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2\}}$$

   (d) Les solutions de (E) vérifient donc $y(x) = z(ln(x))$ où $z \in \mathcal{S}_z$. Il existe donc $(C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\begin{aligned}
y(x) &= C_1e^{2ln(x)} + C_2ln(x)e^{2ln(x)} \\
&= C_1x^2 + C_2x^2\ln(x)
\end{aligned}$$

   On retrouve bien la forme des solutions de 1.

$$\boxed{\text{L'ensemble des solutions de } E \text{ est } \mathcal{S} = \{x \mapsto C_1x^2 + C_2x^2\ln(x) \,|\, (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2\}}$$

TOURNEZ SVP

Exercice 5. On considère dans cet exercice qu'un brin d'ADN est représenté par une chaîne de caractère appelée `ADN`, où les nucléotides seront désignés par les lettres "A", "C", "G" et "T" dans le brin d'ADN.

1. Écrire une fonction `comptage(ADN, c)` prenant comme argument une chaîne de caractères `ADN` et un caractère `c` et qui renvoie le nombre d'apparitions de `c` dans `ADN`.
2. Écrire une fonction qui prend en argument une chaîne de caractères `ADN`, et qui renvoie une liste de taille 4, dont l'élément 0 est la proportion de "A", l'élément 1 la proportion de "C", l'élément 2 la proportion de "G" et l'élément 3 la proportion de "T".
3. A une séquence d'ADN correspond une unique séquence d'ARN grâce aux règles de complémentarité : G et C sont inversés, A devient U et T devient A. Par exemple, la séquence d'ADN 'AATCGA' est transcrite en 'UUAGCU.'

   Ecrire une fonction `transcription` qui prend en argument une chaîne de caractères `ADN` et retourne la chaine d'ARN correspondante.
4. On souhaite repérer les éventuelles mutations par substitution (remplacement d'un nucléotide par un autre) entre deux brins d'ADN. Écrire une fonction qui prend en argument deux brins d'ADN, qui compare lettre à lettre les deux brins et retourne une liste contenant les positions des mutations observées entre les deux brins d'ADN. La fonction devra renvoyer un message d'erreur si les deux brins ne sont pas de même taille.
5. On souhaite repérer les séquences codantes d'un brin d'ADN. Pour cela, on veut repérer la position du codon d'initiation "ACG". Écrire une fonction `init` qui prend en argument un brin d'ADN sous forme de chaine de caractères, et qui renvoie la chaine de caractère où seules les nucléotides apres 'ACG' aparraissent.

   Exemple `init('AGGTACGTTAGT')` devra renvoyer : `'ACGTTAGT'`
6. On suppose maintenant que notre chaine de caractères `ADN` commence par le codon 'ACG'. On dispose de la fonction suivante :

   ```python
   def mystere(ADN):
       L=[]
       for i in range(len(ADN)-3):
           L.append(ADN[i:i+3])
       return(L)
   ```

   Que fait cette fonction ? En particulier dire ce qu'elle retourne sur l'exemple : `ADN='ACGGAGTTTTGG'`
7. Ecrire une fonction qui prend un chaine de caractères `ADN` qui commence par le codon 'ACG' retourne la liste des codons jusqu'au premier codon stop (TAA, TAG, ou TGA) (ce codon stop sera inclus dans la liste)

Correction 5.

1. ```python
   def comptage(ADN,c):
       n=0
       for lettre in ADN:
           if lettre==c:
               n+=1
       return n
   ```
2. ```python
   def compt(ADN):
       A=comptage(ADN,'A')
       C=comptage(ADN,'C')
       G=comptage(ADN,'G')
   ```

```
    T=comptage(ADN,'T')
    n=len(ADN)
    return [A/n,C/n,G/n,T/n]
```

3.
```
def transcription(ADN):
    ARN=''
    for lettre in ADN:
        if lettre=='A':
            ARN+='U'
        if lettre=='C':
            ARN+='G'
        if lettre=='G':
            ARN+='C'
        if lettre=='T':
            ARN+='A'
    return ARN
```

4.
```
    def mutation(ADN1,ADN2):
        L=[]
        if len(ADN1)!=len(ADN2):
            return 'chaines de longueur différente'
        else:
            for i in range(len(ADN1)):
                if ADN1[i]!= ADN2[i]:
                    L.append(i)
        return L
```

5.
```
def init(ADN):
    for i in range(len(ADN)-3):
        if ADN[i:i+3]=='ACG':
            return ADN[i:]
```

6.
```
def decompose(ADN):
    L=[]
    for i in range(len(ADN)-3):
        L.append(ADN[i:i+3])
    return(L)
```

Elle découpe en codon, avec `ADN='ACGGAGTTTTGG'` elle retournera : `['ACG','GAG','TTT','TGG']`

7.
```
def codante(ADN):
    L=decompose(ADN)
    for i in range(len(L)):
        codon=L[i]
        if codon=='TAA' or codon=='TAG' or codon=='TGA':
            return( L[:i+1])
```

8.