DS5

3h00

- Les calculatrices sont <u>interdites</u> durant les cours, TD et *a fortiori* durant les DS de mathématiques.
- Si vous pensez avoir découvert une erreur, indiquez-le clairement sur la copie et justifiez les initiatives que vous êtes amené·e ·s à prendre.
- Une grande attention sera apportée à la clarté de la rédaction et à la présentations des solutions. (Inscrivez clairement en titre le numéro de l'exercice, vous pouvez aussi encadrer les réponses finales.)
- Vérifiez vos résultats.
- Le résultat d'une question peut être admis et utilisé pour traiter les questions suivantes en le signalant explicitement sur la copie.

Exercice 1. Soit M la matrice :

$$M = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Résoudre le système $MX = \lambda X$ d'inconnue $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ où λ est un paramètre réel.

   Montrer que P est inversible et calculer son inverse.
2. Soit $T = P^{-1}MP$. Calculer T.
3. Donner l'expression de T^n en fonction de P, M et n. (La récurrence n'est pas exigée)
4. On pose $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

   Vérifier que
   $$T = D + N \quad \text{et} \quad ND = DN$$
5. Calculer N^2
6. Montrer que $T^n = D^n + nND^{n-1}$.
7. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites vérifiant $x_0 = 0, y_0 = 1$, et $z_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$
   $$\begin{cases} x_{n+1} &= -x_n - 3y_n \\ y_{n+1} &= 2y_n \\ z_{n+1} &= 3x_n + 2y_n + 2z_n \end{cases}$$
   On considère $U_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$
   (a) Déterminer une relation de récurrence entre U_{n+1}, U_n et M.
   (b) En déduire à l'aide d'une récurrence l'expression de U_n en fonction de M, n et U_0.
   (c) En déduire l'expression de x_n en fonction de n.

Exercice 2. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. On désigne par I_2 la matrice identité d'ordre 2.

1. Montrer qu'il existe $(a_2, b_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que
   $$A^2 = a_2A + b_2I_2$$
2. La matrice A est-elle inversible ? Si oui, donner son inverse.
3. Démontrer qu'il existe deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que, pour tout entier n : $A^n = a_nA + b_nI_3$. Donner les relations de récurrence vérifiées par ces deux suites.
4. Que vaut a_0, b_0, a_1, b_1 ?
5. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$
   $$a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$$
6. En déduire l'expression de a_n et de b_n en fonction de n puis celle de A^n en fonction de n, A et I_3.

Exercice 3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $M_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrés de tailles n. Soit

— $\mathcal{A}_n$ le sous-ensemble de $M_n(\mathbb{R})$ tel que tous les coefficients des matrices soit dans $\{0, 1\}$.

— Soit $k \in [\![0, n]\!]$ et $\mathcal{A}_n(k)$ le sous-ensemble de $\mathcal{A}_n(k)$ tel que chaque ligne contient exactement k fois l'entier 1.

1. Combien y-a-t-il de coefficients dans une matrice de $M_n(\mathbb{R})$?
2. Donner le cardinal de $\mathcal{A}_n$ en fonction de n.
3. Que vaut $\mathcal{A}_n(0)$ et $\mathcal{A}_n(n)$?
4. Donner toutes les matrices de $\mathcal{A}_2(1)$.
5. Justifier que $\mathrm{Card}(\mathcal{A}_n(1)) = n^n$.
6. Donner le cardinal de $\mathcal{A}_n(k)$ en fonction de k et n.

Exercice 4. On dispose d'une urne contenant 2 boule bleues, 3 boules rouges et 4 boules vertes. On suppose que toutes les boules sont distinguables (numérotées par exemple).

On tire trois boules simultanément

1. Combien y-a-t-il de tirages possibles ?
2. Combien y-a-t-il de tirages qui amènent exactement une boule rouge ?
3. Combien y-a-t-il de tirages qui amènent trois boules de la même couleur ?
4. Combien y-a-t-il de tirages qui amènent des boules de trois couleurs ?

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose maintenant que l'on dispose d'un ensemble $\{C_1, ..., C_n\}$ de n couleurs. et d'une urne contenant 1 boule de couleur C_1, deux boules de couleur C_2 et ainsi de suite, avec i boules de couleur C_i, jusqu'à n boules de couleur C_n.

On fait deux tirages successifs avec remises :

5. Exprimer N le nombre de boules dans l'urne en fonction de n. Puis donner en fonction de N le nombre de tirages possibles ?
6. Combien de tirages amènent au premier tirage une boule de couleur C_i et une boule d'une autre couleur au second tirage ? (on donnera la réponse en fonction de N et i)
   On rappelle que $\sum_{i=0}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
7. Montrer que le nombre de tirages qui amènent deux boules de couleurs différentes vaut :

$$\frac{N(n-1)(3n+2)}{6}$$

Exercice 5. Les fonctions suivantes admettent-elles un prolongement par continuité aux bornes finies de leur domaine de définition ?

$$f(x) = \frac{x \ln(x^2)}{\ln(x+1)}$$

$$g(x) = \frac{\sqrt{1-x^2} - 1}{e^x - 1}$$

$$h(x) = \sin(x) \cos(\ln(x))$$

Exercice 6. Soit $\lfloor x \rfloor$ la partie entière de $x \in \mathbb{R}$.

1. Rappeler l'inégalité qui permet de définir $\lfloor x \rfloor$.

   Soit (E) l'équation : $\lfloor x^2 + x \rfloor = 2$
2. $\sqrt{3} - 1$ est il solution de (E) ?
3. Montrer que (E) est équivalente à deux inégalités que l'on résoudra.
4. Donner les solutions de (E).