Correction DS5

Exercice 1. Soit M la matrice :

$$M = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Résoudre le système $MX = \lambda X$ d'inconnue $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ où λ est un paramètre réel.
2. Montrer que P est inversible et calculer son inverse.
3. Soit $T = P^{-1}MP$. Calculer T.
4. Donner l'expression de T^n en fonction de P, M et n. (La récurrence n'est pas exigée)
5. On pose $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

   Vérifier que
   $$T = D + N \quad \text{et} \quad ND = DN$$
6. Calculer N^2
7. Montrer que $T^n = D^n + nND^{n-1}$.
8. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites vérifiant $x_0 = 0, y_0 = 1$, et $z_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$

   $$\begin{cases} x_{n+1} &= -x_n - 3y_n \\ y_{n+1} &= 2y_n \\ z_{n+1} &= 3x_n + 2y_n + 2z_n \end{cases}$$

   On considère $U_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$

   (a) Déterminer une relation de récurrence entre U_{n+1}, U_n et M.

   (b) En déduire à l'aide d'une récurrence l'expression de U_n en fonction de M, n et U_0.

   (c) En déduire l'expression de x_n en fonction de n.

Correction 1.

1.
$$MX = \lambda X \iff \begin{pmatrix} -x - 3y \\ 2y \\ 3x + 2y + 2z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \\ \lambda z \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -x & -3y & & = & \lambda x \\ & 2y & & = & \lambda y \\ 3x & +2y & +2z & = & \lambda z \end{cases} \iff \begin{cases} (-1-\lambda)x & -3y & & = & 0 \\ & (2-\lambda)y & & = & 0 \\ 3x & +2y & +(2-\lambda)z & = & 0 \end{cases}$$

En échangeant les lignes et les colonnes on peut voir que le système est déjà échelonné. $L_3 \leftarrow L_1, L_2 \leftarrow_3, L_1 \leftarrow L_2$,$C_3 \leftarrow C_1, C_2 \leftarrow C_3, C_1 \leftarrow C_2$

$$MX = \lambda X \iff \begin{cases} (2-\lambda)z & +3x & +2y & = & 0 \\ & (-1-\lambda)x & -3y & = & 0 \\ & & (2-\lambda)y & = & 0 \end{cases}$$

Si $\lambda \notin \{-1, 2\}$ alors le système est de rang 3, il est donc de Cramer et l'unique solution est

$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}}$$

Si $\lambda = -1$, le système est équivalent à

$$\left\{ \begin{array}{rrrcl} 3z & +3x & +2y & = & 0 \\ & -3y & & = & 0 \\ & 3y & & = & 0 \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} z & = -x \\ y & = 0 \end{array} \right.$$

Le système est de rang 2. L'ensemble des solutions est

$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ -x \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R} \right\}}$$

Si $\lambda = 2$, le système est équivalent à

$$\left\{ \begin{array}{rrcl} 3x & +2y & = & 0 \\ -3x & -3y & = & 0 \\ & 0 & = & 0 \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rrl} x & & = 0 \\ & y & = 0 \end{array} \right.$$

Le système est de rang 2. L'ensemble des solutions est

$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix}, z \in \mathbb{R} \right\}}$$

2. On considère la matrice augmentée : $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$

   $L_3 \leftrightarrow L_1$ donnent

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

   $L_3 \leftarrow L_3 + L_2$ donne

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

   $L_2 \leftarrow -L_2$ donne

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

   Enfin $L_1 \leftrightarrow L_1 + L_3$ donne

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

$$\boxed{P \text{ est inversible d'inverse } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}}$$

3. Le calcul donne

$$\boxed{T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}$$

(sur une copie, le produit intermédiaire MP serait apprécié)

4. On peut juste dire $T^n = P^{-1}M^nP$"

Voici la preuve par récurrence, non attendue dans ce DS. On pose $P(n)$: "$T^n = P^{-1}M^nP$"

Initialisation $T^1 = T$ et $P^{-1}M^1P = P^{-1}MP = T$ d'après la définition de T. Donc $P(1)$ est vrai.

Hérédité On suppose qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$ soit vraie. On a alors

$$(T)^{n+1} = T^nT$$

et donc par Hypothése de récurrence :

$$\begin{aligned} T^{n+1} &= (P^{-1}M^nP)(P^{-1}MP) \\ &= (P^{-1}M^nPP^{-1}MP) \\ &= (P^{-1}M^n \operatorname{Id} MP) \\ &= (P^{-1}M^nMP) \\ &= (P^{-1}M^{n+1}P) \end{aligned}$$

Conclusion $P(n)$ est vraie pour tout n.

5. On a $T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

et

$DN = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = ND$

6. $N^2 = 0_3$

7. Solution 1 : On peut appliquer le binome de Newton à $T = D + N$ car D et N commutent. On a alors

$$T^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N^kD^{n-k}$$

Comme pour tout $k \geq 2$, $N^2 = 0$ il reste dans cette somme seulement les termes $k = 0$ et $k = 1$. On obtient donc

$$\begin{aligned} T^n &= \binom{n}{0} N^0D^{n-0} + \binom{n}{1} N^1D^{n-1} \\ &= D^n + nND^{n-1} \end{aligned}$$

Solution 2 :

On pose $P(n)$: ´ $T^n = D^n + nD^{n-1}N$ ˇ

— Initialisation $T^1 = T$ et $D^1 + 1D^0N = D^1 + \operatorname{Id} N = D + N = T$ d'après la définition de D, N. Donc $P(1)$ est vrai.

— <u>Hérédité</u> On suppose qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$ soit vraie. On a alors

$$(T)^{n+1} = T^n T$$

et donc par Hypothése de récurrence :

$$\begin{aligned} T^{n+1} &= (D^n + nD^{n-1}N)(D+N) \\ &= D^n D + nD^{n-1}ND + D^n N + nD^{n-1}N^2 \end{aligned}$$

Comme $ND = DN$ on a $D^{n-1}ND = D^{n-1}DN = D^n N$. on a par ailleurs $N^2 = 0$ donc

$$\begin{aligned} T^{n+1} &= D^{n+1} + D^n N + nD^n N \\ &= D^{n+1} + (n+1)D^{(n+1)-1}N \end{aligned}$$

Ainsi la propriété est héréditaire.

— <u>Conclusion</u> $P(n)$ est vraie pour tout n.

Clairement la solution 1 est plus rapide.

8. Le système donne la relation suivante
   (a) (attention au sens entre M et U_n)
   $$\boxed{U_{n+1} = MU_n}$$
   (b) Faire la récurrence pour montrer
   $$\boxed{U_n = M^n U_0}$$
   (c) On a donc $U_n = \begin{pmatrix} 2^n & 2^n - 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2^n + 1 & -2^n + 1 + n & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ On obtient
   $$\boxed{x_n = 2^{n+1} - 1}$$
   Une copie a montrée que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une SRL2, ca marche aussi.

Exercice 2. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. On désigne par I_2 la matrice identité d'ordre 2.

1. Montrer qu'il existe $(a_2, b_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que
   $$A^2 = a_2 A + b_2 I_2$$
2. La matrice A est-elle inversible ? Si oui, donner son inverse.
3. Démontrer qu'il existe deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que, pour tout entier n : $A^n = a_n A + b_n I_2$. Donner les relations de récurrence vérifiées par ces deux suites.
4. Que vaut a_0, b_0, a_1, b_1 ?
5. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$
   $$a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$$
6. En déduire l'expression de a_n et de b_n en fonction de n puis celle de A^n en fonction de n, A et I_3.

Correction 2. Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

On désigne par I_2 la matrice identité d'ordre 2.

1. **Expression de A^2 sous la forme $A^2 = a_2 A + b_2 I_2$:** Calculons A^2 :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1\times 1 + (-1)\times 2 & 1\times(-1) + (-1)\times 4 \\ 2\times 1 + 4\times 2 & 2\times(-1) + 4\times 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 10 & 14 \end{pmatrix}.$$

   Nous cherchons a_2, b_2 tels que :

$$A^2 = a_2 A + b_2 I_2.$$

   En identifiant les coefficients, on trouve :

$$a_2 = 5, \quad b_2 = -6.$$

$$\boxed{\text{On a donc } A^2 = 5A - 6I_2.}$$

2. **Solution 1** On a donc $A(\frac{-1}{6}(A - 5I_2)) = I_2$

$$\boxed{\text{La matrice } A \text{ est inversible et son inverse est } A^{-1} = \tfrac{-1}{6}(A - 5I_2))}$$

   Solution 2 A est inversible si $\det(A) \neq 0$:

$$\det(A) = (1\times 4) - (-1\times 2) = 4 + 2 = 6 \neq 0.$$

   Donc A est inversible, et son inverse est :

$$A^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\boxed{\text{La matrice } A \text{ est inversible et son inverse est } A^{-1} = \tfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.}$$

3. Soit $P(n)$ la propriété de récurrence : "$\exists (a_n, b_n) \in \mathbb{R}^2$, $A^n = a_n A + b_n I_2$"
   Initialisation : $P(0)$ est vraie avec $a_0 = 0$ et $b_0 = 1$

   Hérdité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$ soit vraie. On a donc :

$$A^n = a_n A + b_n I_2$$

   Soit en multipliant par A :

$$A^{n+1} = a_n A^2 + b_n A$$

   Or $A^2 = 5A - 6I_2$ (Q1) donc

$$A^{n+1} = a_n(5A - 6I_2) + b_n A$$

   et donc :

$$A^{n+1} = (5a_n + b_n)A - 6a_n I_2$$

   Ainsi $P(n+1)$ est vraie avec $a_{n+1} = 5a_n + b_n$ et $b_{n+1} = -6a_n$

   Conclusion : $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$ et

$$\boxed{a_{n+1} = 5a_n + b_n \text{ et } b_{n+1} = -6a_n}$$

4. **Valeurs initiales :**

$$A^0 = I_2 \Rightarrow a_0 = 0, \quad b_0 = 1.$$
$$A^1 = A \Rightarrow a_1 = 1, \quad b_1 = 0.$$

$$\boxed{\text{On obtient } a_0 = 0, b_0 = 1, a_1 = 1, b_1 = 0.}$$

5. **Relation de récurrence :** On a prouvé que (a_n) vérifie :

$$a_{n+1} = 5a_n + b_n. \quad \text{et} \quad b_{n+1} = -6a_n$$

Donc

$$a_{n+2} = 5a_{n+1} + b_{n+1}.$$

D'où

$$\boxed{a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n}$$

6. **Expression explicite de a_n et b_n :** L'équation caractéristique associée à la récurrence est :

$$x^2 - 5x + 6 = 0.$$

Elle admet les racines $x_1 = 2$ et $x_2 = 3$, donc :

$$a_n = \alpha 2^n + \beta 3^n.$$

En utilisant $a_0 = 0$ et $a_1 = 1$, on trouve :

$$\alpha + \beta = 0, \quad 2\alpha + 3\beta = 1.$$

Résolvant ce système, on obtient $\alpha = -1$, $\beta = 1$, donc :

$$a_n = 3^n - 2^n.$$

On en déduit que

$$b_n = -6(3^{n-1} - 2^{n-1})$$

$$\boxed{\text{Les expressions sont } a_n = 3^n - 2^n \text{ et } b_n = -2 \times 3^n + 3 \times 2^n.}$$

7. **Expression de A^n en fonction de n, A et I_3 :**

$$\boxed{A^n = (3^n - 2^n)A + (-2 \times 3^n + 3 \times 2^n)I_2.}$$

Exercice 3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $M_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrés de tailles n. Soit

— $\mathcal{A}_n$ le sous-ensemble de $M_n(\mathbb{R})$ tel que tous les coefficients des matrices soit dans $\{0, 1\}$.

— Soit $k \in [\![0, n]\!]$ et $\mathcal{A}_n(k)$ le sous-ensemble de $\mathcal{A}_n(k)$ tel que chaque ligne contient exactement k fois l'entier 1.

1. Combien y-a-t-il de coefficients dans une matrice de $M_n(\mathbb{R})$?
2. Donner le cardinal de $\mathcal{A}_n$ en fonction de n.
3. Que vaut $\mathcal{A}_n(0)$ et $\mathcal{A}_n(n)$?
4. Donner toutes les matrices de $\mathcal{A}_2(1)$.
5. Justifier que $\text{Card}(\mathcal{A}_n(1)) = n^n$.
6. Donner le cardinal de $\mathcal{A}_n(k)$ en fonction de k et n.

Correction 3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $M_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées de taille n.
Définissons :

— $\mathcal{A}_n$, le sous-ensemble de $M_n(\mathbb{R})$ tel que tous les coefficients des matrices soient dans $\{0, 1\}$.

— Pour $k \in [0, n]$, $\mathcal{A}_n(k)$ est le sous-ensemble de $\mathcal{A}_n$ tel que chaque ligne contient exactement k fois l'entier 1.

1. **Nombre de coefficients dans une matrice de $M_n(\mathbb{R})$:** Une matrice $n \times n$ contient :
$$n^2$$
coefficients.
$$\boxed{\text{Une matrice de } M_n(\mathbb{R}) \text{ possède } n^2 \text{ coefficients.}}$$

2. **Cardinal de $\mathcal{A}_n$ en fonction de n :** Chaque coefficient d'une matrice de $\mathcal{A}_n$ peut prendre deux valeurs (0 ou 1), donc :
$$\text{Card}(\mathcal{A}_n) = 2^{n^2}.$$
$$\boxed{\text{Le cardinal de } \mathcal{A}_n \text{ est } 2^{n^2}.}$$

3. **Valeurs de $\mathcal{A}_n(0)$ et $\mathcal{A}_n(n)$:**
   — $\mathcal{A}_n(0)$ est l'ensemble contenant uniquement la matrice nulle, donc :
$$\mathcal{A}_n(0) = \left\{ \mathbf{0}_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$
   — $\mathcal{A}_n(n)$ est l'ensemble contenant uniquement la matrice remplie de 1, donc :
$$\mathcal{A}_n(n) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

4. **Matrice de $\mathcal{A}_2(1)$:** Les matrices de $\mathcal{A}_2(1)$ sont celles où chaque ligne contient exactement un seul 1 :
$$\mathcal{A}_2(1) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

5. **Justification de Card($\mathcal{A}_n(1)) = n^n$:** Dans chaque ligne de la matrice, il y a n choix pour la position du 1 (le reste étant 0). Comme il y a n lignes indépendantes, on a :

$$\text{Card}(\mathcal{A}_n(1)) = n^n.$$

$$\boxed{\text{Le cardinal de } \mathcal{A}_n(1) \text{ est } n^n.}$$

6. **Cardinal de $\mathcal{A}_n(k)$ en fonction de k et n :** Dans chaque ligne, on choisit k positions parmi n pour mettre un 1, soit $\binom{n}{k}$ choix. Comme il y a n lignes, on a :

$$\text{Card}(\mathcal{A}_n(k)) = \left(\binom{n}{k}\right)^n.$$

$$\boxed{\text{Le cardinal de } \mathcal{A}_n(k) \text{ est } \left(\binom{n}{k}\right)^n.}$$

Exercice 4. On dispose d'une urne contenant 2 boule bleues, 3 boules rouges et 4 boules vertes. On suppose que toutes les boules sont distinguables (numérotées par exemple).

On tire trois boules simultanément

1. Combien y-a-t-il de tirages possibles ?
2. Combien y-a-t-il de tirages qui amènent exactement une boule rouge ?
3. Combien y-a-t-il de tirages qui amènent trois boules de la même couleur ?
4. Combien y-a-t-il de tirages qui amènent des boules de trois couleurs ?

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose maintenant que l'on dispose d'un ensemble $\{C_1, ..., C_n\}$ de n couleurs. et d'une urne contenant 1 boule de couleur C_1, deux boules de couleur C_2 et ainsi de suite, avec i boules de couleur C_i, jusqu'à n boules de couleur C_n.

On fait deux tirages successifs avec remises :

5. Exprimer N le nombre de boules dans l'urne en fonction de n. Puis donner en fonction de N le nombre de tirages possibles ?
6. Combien de tirages amènent au premier tirage une boule de couleur C_i et une boule d'une autre couleur au second tirage ? (on donnera la réponse en fonction de N et i)
   On rappelle que $\sum_{i=0}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
7. Montrer que le nombre de tirages qui amènent deux boules de couleurs différentes vaut :

$$\frac{N(n-1)(3n+2)}{6}$$

Correction 4.

1. Il y a $\binom{9}{3}$ tirages possibles. (sans ordre et sans répétition)
2. $\binom{3}{1}\binom{6}{2}$ (1 boule parmi les 3 rouges, 2 boules parmi les 6 restantes)
3. $\binom{3}{3} + \binom{4}{3}$ (soit 3 boules rouges, soit 3 boules vertes)
4. $\binom{2}{1}\binom{3}{1}\binom{4}{1}$(1 boule parmi les 3 rouges, 1 boule parmi les 2 bleues et 1 boule parmi les 4 vertes)
5. $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$, $\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$
6. $i \times \left(\frac{n(n+1)}{2} - i\right)$ (i possiblités pour le premier tirage, et (N-i) pour le deuxième)

7.

$$\sum_{i=1}^{n} i \times \left(\frac{n(n+1)}{2} - i\right) = \sum_{i=1}^{n} i\left(\frac{n(n+1)}{2}\right) - \sum_{i=1}^{n} i^2$$
$$= \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$
$$= \frac{n(n+1)(3n(n+1) - 2(2n+1))}{12}$$
$$= \frac{n(n+1)}{6}(3n^2 - n - 2)$$

Exercice 5. Les fonctions suivantes admettent-elles un prolongement par continuité aux bornes finies de leur domaine de définition ?

$$f(x) = \frac{x\ln(x^2)}{\ln(x+1)}$$

$$g(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}-1}{e^x - 1}$$

$$h(x) = \sin(x)\cos(\ln(x))$$

Correction 5. **Étude de** $f(x)$
La fonction f est définie pour$D_f =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$. Étudions les limites aux bornes :

- **Limite en** 0 : $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$ (taux d'accroissement) et $\lim_{x\to 0}\ln(x) = -\infty$ donc

$$\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty$$

$$\boxed{f \text{ n'est pas prolongeable par continuité en } 0}$$

- **Limite en** -1 : $\lim_{x\to -1} \frac{1}{\ln(x+1)} = 0$ (taux d'accroissement) et $\lim_{x\to -1} x\ln(x^2) = 0$ donc

$$\lim_{x\to -1} f(x) = 0$$

$$\boxed{f \text{ est prolongeable par continuité en } 0}$$

Étude de $g(x)$
La fonction g est définie pour $D_g = [-1, 0[\cup]0, 1]$. Étudions les limites aux bornes :
- **Limite en** 0 : On a d'une part

$$g(x) = \frac{1 - x^2 - 1}{(e^x - 1)(\sqrt{1-x^2}+1} = \frac{x^2}{(e^x-1)(\sqrt{1-x^2}+1)}$$

d'autre part

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(e^x - 1)}{x} = 1$$

(taux d'accroissement) Donc

$$\lim_{x\to 0} g(x) = 0$$

$$\boxed{g \text{ est prolongeable par continuité en } 0}$$

Étude de $h(x)$

La fonction g est définie pour $D_h =]0, +\infty[$. Étudions les limites aux bornes : - **Limite en** 0 : Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos(x) \in [-1, 1]$ donc pour tout $x > 0$,

$$\cos(\ln(x) \in [-1, 1]$$

Ainsi

$$-|\sin(x)| \leq h(x) \leq |\sin(x)|$$

Or $\lim_{x \to 0} sin(x) = 0$ donc par le théorème d'encadrement

$$\lim_{x \to 0} h(x) = 0$$

$$\boxed{h \text{ est prolongeable par continuité en } 0}$$

Exercice 6. Soit $\lfloor x \rfloor$ la partie entière de $x \in \mathbb{R}$.

1. Rappeler l'inégalité qui permet de définir $\lfloor x \rfloor$.

   Soit (E) l'équation : $\lfloor x^2 + x \rfloor = 2$
2. $\sqrt{3} - 1$ est il solution de (E) ?
3. Montrer que (E) est équivalente à deux inégalités que l'on résoudra.
4. Donner les solutions de (E).

Correction 6. Soit $\lfloor x \rfloor$ la partie entière de $x \in \mathbb{R}$.

1. **Rappel de l'inégalité définissant la partie entière :** Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la partie entière $\lfloor x \rfloor$ est définie par l'inégalité :
$$\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$$
2. **Vérification de $\sqrt{3} - 1$ comme solution de (E) :** L'équation donnée est :
$$\lfloor x^2 + x \rfloor = 2$$
   Calculons pour $x = \sqrt{3} - 1$:
$$\begin{aligned} x^2 + x &= (\sqrt{3} - 1)^2 + (\sqrt{3} - 1) \\ &= (3 - 2\sqrt{3} + 1) + \sqrt{3} - 1 \\ &= 3 - 2\sqrt{3} + \sqrt{3} \\ &= 3 - \sqrt{3} < 2 \text{ car } \sqrt{3} > 1 \end{aligned}$$
   Donc,
$$\lfloor 3 - \sqrt{3} \rfloor \neq 2$$
$$\boxed{\sqrt{3} - 1 \text{ n'est pas solution de (E)}}$$
   .
3. **Réécriture de l'équation sous forme d'inégalités :** L'équation $\lfloor x^2 + x \rfloor = 2$ est équivalente à :
$$2 \leq x^2 + x < 3$$
   Ce qui donne le système d'inéquations :
$$x^2 + x - 2 \geq 0$$
$$x^2 + x - 3 < 0$$

4. **Résolution du système :**
   - Résolvons $x^2 + x - 2 \geq 0$:
   $$(x+2)(x-1) \geq 0 \Longleftrightarrow x \in]-\infty, -2] \cup [1, +\infty[$$
   - Résolvons $x^2 + x - 3 < 0$:
   $$x \in [\frac{-1-\sqrt{13}}{2}, \frac{-1+\sqrt{13}}{2}]$$

   Or $\frac{-1-\sqrt{13}}{2} < -2$ et $\frac{-1+\sqrt{13}}{2} > 1$

   $$\boxed{\mathcal{S} =]\tfrac{-1-\sqrt{13}}{2}, -2] \cup [-1, \tfrac{-1+\sqrt{13}}{2}[}$$